10.1 INTRODUCCIÓN

En los capítulos anteriores existían dos preocupaciones primarias: 1) la resistencia de la estructura, es decir, su capacidad para sostener una carga especificada sin experimentar esfuerzos excesivos; 2) la capacidad de la estructura para sostener una carga especificada sin sufrir deformaciones inaceptables. En este capítulo se analizará la *estabilidad* de la estructura, esto es, su capacidad para soportar una carga dada sin experimentar un cambio súbito en su configuración. El análisis se referirá principalmente a las columnas, es decir, al estudio y diseño de elementos prismáticos verticales que soportan cargas axiales.

Primero, en la sección 10.2 se examinará la estabilidad de un modelo simplificado que consta de dos barras rígidas que soportan una carga **P** y están conectadas por un pasador y un resorte. Se observará que si se perturba su equilibrio, el sistema retornará a su posición original de equilibrio siempre que P no exceda un cierto valor P_{cr}, llamado *carga crítica*. Sin embargo, si $P > P_{cr}$, el sistema se alejará de su posición original y adquirirá una nueva posición de equilibrio. En el primer caso, se dice que el sistema es *estable* y en el segundo se dice que es *inestable*.

En la sección 10.3, el estudio de *estabilidad de columnas elásticas* comenzará analizando una columna de extremos articulados, sometida a una carga axial céntrica. Se obtendrá la *fórmula de Euler* para la carga crítica de la columna y mediante ella se determinará el esfuerzo normal crítico en la columna. Aplicando un factor de seguridad a la carga crítica, podrá calcularse la carga admisible que es posible aplicar a la columna de extremos articulados.

En la sección 10.4 se revisará la estabilidad de las columnas con diferentes condiciones de extremo. Este análisis se simplificará aprendiendo a determinar la *longitud efectiva* de una columna, es decir, la longitud de una columna articulada que tiene la misma carga crítica.

En la sección 10.5 se estudiarán las columnas con carga axial excéntrica; estas columnas tienen deflexiones transversales para todas las magnitudes de la carga. Se deducirá una expresión para la deflexión bajo una carga dada, la cual se usará para calcular el esfuerzo normal máximo en la columna. Por último, se desarrollará la *fórmula de la secante* que relaciona los esfuerzos medio y máximo en una columna.

En las primeras secciones del capítulo, cada columna se supone inicialmente como un prisma recto homogéneo. En la última parte del capítulo, se considerarán columnas reales que se diseñan y analizan usando ecuaciones empíricas dadas por organizaciones profesionales. En la sección 10.6 se presentarán ecuaciones para determinar el esfuerzo admisible en columnas hechas de acero, aluminio o madera y sometidas a una carga axial céntrica. En la sección 10.7, se considera el diseño de columnas con carga axial excéntrica.

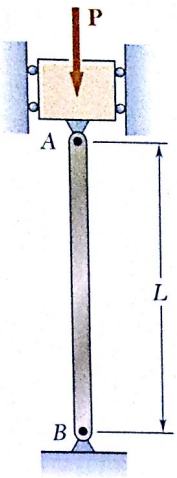


Figura 10.1

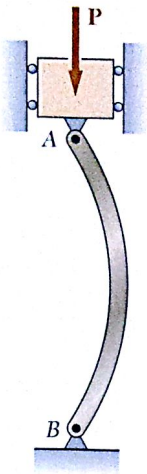


Figura 10.2

10.2 ESTABILIDAD DE ESTRUCTURAS

Suponga que debe diseñarse una columna AB de longitud L, para soportar una carga **P** (figura 10.1). Imagine que **P** es una carga axial céntrica y que la columna tiene sus dos extremos articulados. Si el área transversal A de la columna es tal que el valor $\sigma = P/A$ del esfuerzo en la sección transversal es menor que el valor permisible σ_{perm} para el material utilizado y si la deformación $\delta = PL/AE$ cae dentro de las especificaciones dadas, podría concluirse que la columna se ha diseñado bien. Sin embargo, puede suceder que al aplicar la carga la columna se *pandee*, en lugar de permanecer recta, y se curve repentinamente (figura 10.2). La figura 10.3 muestra una columna, similar a la de la fotografía que da inicio a este capítulo, después de que se le ha cargado de modo tal que ya no es recta; la columna se pandeó. Obviamente, una columna que se pandea bajo la carga especificada está mal diseñada.

Figura 10.3 Columna pandeada.

Antes de estudiar la estabilidad de las columnas elásticas, será necesario familiarizarse con el problema considerando un modelo simplificado que consta de dos barras rígidas AC y BC, conectadas en C por un pasador y un resorte torsional de constante K (figura 10.4).

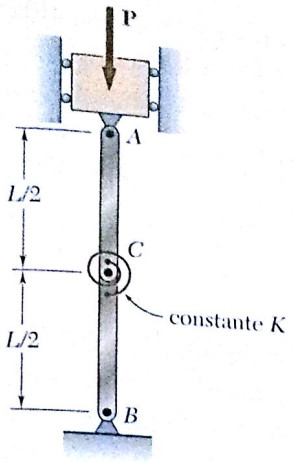
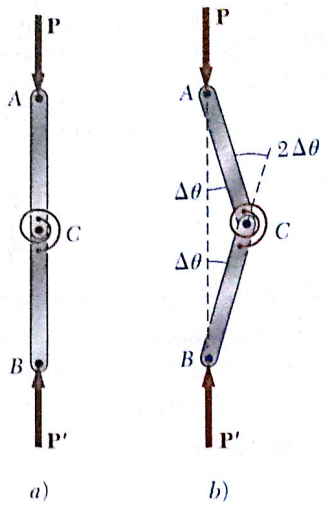


Figura 10.4



a) b)

Figura 10.5

Si las dos barras y las dos fuerzas **P** y **P′** están perfectamente alineadas, el sistema permanecerá en la posición de equilibrio que muestra la figura 10.5*a* siempre que no sea perturbado. Pero suponga que *C* se mueve ligeramente a la derecha, de modo que cada barra forma ahora un pequeño ángulo $\Delta\theta$ con la vertical (figura 10.5*b*). ¿Volverá el sistema a su posición de equilibrio original o se alejará aún más de dicha posición? En el primer caso se dice que el sistema es *estable* y en el segundo, que es *inestable*.

Para determinar si el sistema de dos barras es estable o inestable, se consideran las fuerzas que actúan sobre la barra *AC* (figura 10.6). Estas fuerzas constan de dos pares, el formado por **P** y **P′**, de momento $P(L/2)$ sen $\Delta\theta$, que tiende a alejar la barra de la vertical y el par **M**, ejercido por el resorte, que trata de regresar la barra a su posición inicial. Dado que el ángulo de deflexión del resorte es $2\,\Delta\theta$, el momento del par **M** es $M = K(2\,\Delta\theta)$. Si el momento del segundo par es mayor que el del primero, el sistema tiende a retornar a su posición original de equilibrio; el sistema es estable. Si el momento del primer par es mayor que el momento del segundo, el sistema tiende a alejarse de su posición original de equilibrio; el sistema es inestable. El valor de la carga para la cual los dos pares son iguales es la *carga crítica* P_{cr}. Se tiene:

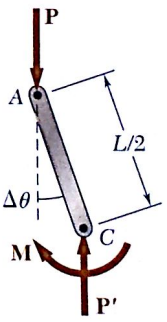


Figura 10.6

$$P_{cr}(L/2) \text{ sen } \Delta\theta = K(2\,\Delta\theta) \tag{10.1}$$

y como sen $\Delta\theta \approx \Delta\theta$,

$$P_{cr} = 4K/L \tag{10.2}$$

Claramente se ve que el sistema es estable para $P < P_{cr}$, es decir, para los valores de la carga menores que el valor crítico, y no estable para $P > P_{cr}$.

Suponga que una carga $P > P_{cr}$ se ha aplicado a las dos barras de la figura 10.4 y que el sistema ha sido perturbado. Como $P > P_{cr}$, el sistema se alejará de la vertical y, luego de algunas oscilaciones, se establecerá en una

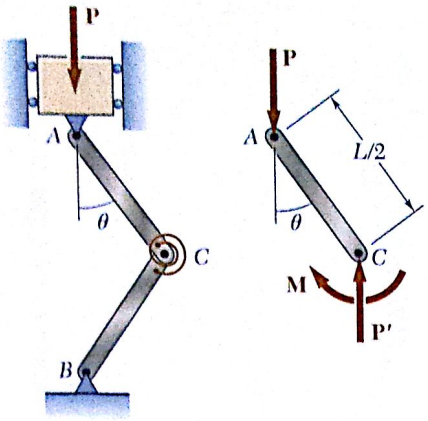


Figura 10.7

nueva posición de equilibrio (figura 10.7*a*). Considerando el equilibrio del cuerpo libre *AC* (figura 10.7*b*), se obtiene una ecuación similar a la ecuación (10.1), pero que incluye el ángulo finito θ.

$$P(L/2)\operatorname{sen}\theta = K(2\theta)$$

o

$$\frac{PL}{4K} = \frac{\theta}{\operatorname{sen}\theta} \tag{10.3}$$

El valor de θ que corresponde a la posición de equilibrio de la figura 10.7 se obtiene resolviendo la ecuación (10.3) por prueba y error. Sin embargo, se observa que, para cualquier valor positivo de θ, se tiene que $\operatorname{sen}\theta < \theta$. Así, la ecuación (10.3) da un valor de θ diferente de cero sólo cuando el miembro izquierdo de la ecuación es mayor que uno. Recordando la ecuación (10.2), se observa que ése es el caso aquí, ya que se ha supuesto $P > P_{cr}$. Pero si se hubiera supuesto $P < P_{cr}$, la segunda posición de equilibrio mostrada en la figura 10.7 no existiría y la única posición de equilibrio posible sería la correspondiente a $\theta = 0$. Así se verifica que, para $P < P_{cr}$, la posición $\theta = 0$ debe ser estable.

Esta observación se aplica a estructuras y sistemas mecánicos en general y se usará en la próxima sección, donde se estudiará la estabilidad de las columnas elásticas.

10.3 FÓRMULA DE EULER PARA COLUMNAS ARTICULADAS

Con base en la columna *AB* de la sección anterior (figura 10.1), se busca hallar el valor crítico de la carga **P**, es decir, el valor P_{cr} de la carga para el cual la posición de la figura 10.1 deja de ser estable. Si $P > P_{cr}$ la menor falta de alineación o perturbación provocará que la columna se doble, es decir, que adopte una forma curva como en la figura 10.2.

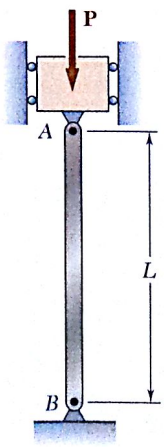


Figura 10.1
(repetida)

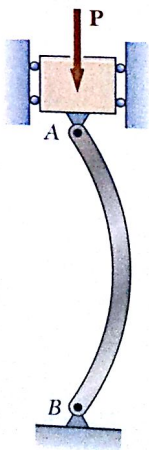


Figura 10.2
(repetida)

El propósito será determinar las condiciones para que la configuración de la figura 10.2 sea posible. Como una columna puede considerarse como una viga en posición vertical y bajo carga axial, se procederá como en el capítulo 9 y se denotará por *x* la distancia desde el extremo *A* de la columna

hasta un punto dado Q de la curva elástica, y por y la deflexión de dicho punto (figura 10.8*a*). El eje x será vertical y dirigido hacia abajo, y el eje y horizontal y dirigido a la derecha. Considerando el equilibrio del cuerpo libre de AQ (figura 10.8*b*), se halla que el momento en Q es $M = -Py$. Sustituyendo este valor de M en la ecuación (9.4) de la sección 9.3,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y \tag{10.4}$$

o, trasponiendo el último término:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = 0 \tag{10.5}$$

Esta ecuación diferencial es lineal, homogénea, de segundo orden, con coeficientes constantes. Haciendo

$$p^2 = \frac{P}{EI} \tag{10.6}$$

la ecuación (10.5) se escribe

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2y = 0 \tag{10.7}$$

que es la misma ecuación diferencial que la del movimiento armónico simple, excepto, por supuesto, en que la variable independiente es ahora x en lugar de t. La solución general es:

$$y = A \operatorname{sen} px + B \cos px \tag{10.8}$$

como puede verificarse, con facilidad, calculando d^2y/dx^2 y sustituyendo y y d^2y/dx^2 en la ecuación (10.7).

Recordando las condiciones de frontera que deben satisfacerse en los extremos A y B de la columna (figura 10.8*a*), primero se hace $x = 0$, $y = 0$ en la ecuación (10.8) y se tiene que $B = 0$. Sustituyendo en seguida $x = L$, $y = 0$, se obtiene

$$A \operatorname{sen} pL = 0 \tag{10.9}$$

Esta ecuación se satisface para $A = 0$ o si sen $pL = 0$. Si ocurre lo primero, la ecuación (10.8) se reduce a $y = 0$ y la columna es recta (figura 10.1). Si se satisface la segunda, $pL = n\pi$ o, sustituyendo p en (10.6) y despejando P:

$$P = \frac{n^2\pi^2EI}{L^2} \tag{10.10}$$

El menor de los valores de P definido por la ecuación (10.10) es el que corresponde a $n = 1$. Entonces

$$P_{cr} = \frac{\pi^2EI}{L^2} \tag{10.11}$$

Ésta es la *fórmula de Euler*, llamada así en honor del matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783). Sustituyendo esta expresión para P en la

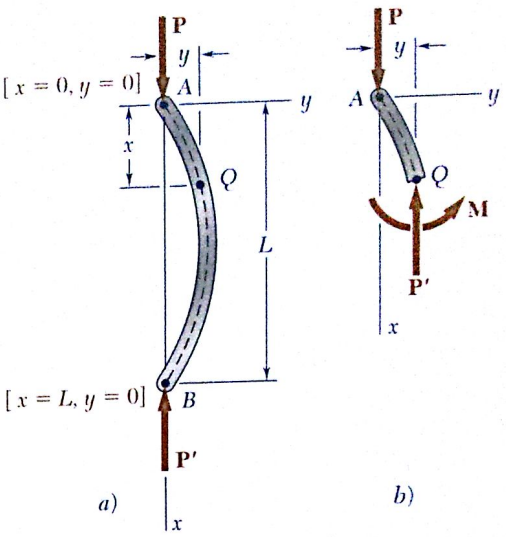


Figura 10.8

ecuación (10.6) y el valor obtenido para p en la ecuación (10.8), y recordando que $B = 0$, se tiene

$$y = A \operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} \tag{10.12}$$

que es la ecuación de la curva elástica después de haberse doblado la columna (figura 10.2). Note que el valor de la deflexión máxima, $y_m = A$, es indeterminado. Esto se debe a que la ecuación diferencial (10.5) es una aproximación linealizada de la ecuación diferencial real para la curva elástica.†

Si $P < P_{cr}$ la condición sen $pL = 0$ no puede satisfacerse, por lo que la solución dada por la ecuación (10.12) no existe. Debe tenerse entonces $A = 0$ y la única configuración posible para la columna es una línea recta. Así, para $P < P_{cr}$ la forma recta de la figura 10.1 es estable.

En el caso de una columna con sección circular o cuadrada, el momento de inercia I de la sección transversal es el mismo con respecto a cualquier eje centroidal y la columna se curvará en un plano u otro, excepto bajo las restricciones que se impongan en los extremos. Para otras secciones, la carga crítica debe calcularse haciendo $I = I_{mín}$ en la ecuación (10.11); si ocurre la curvatura, tendrá lugar en un plano perpendicular al correspondiente eje de inercia principal.

El valor del esfuerzo correspondiente a la carga crítica es el *esfuerzo crítico* y se le designa por σ_{cr}. Retomando la ecuación (10.11) y haciendo $I = Ar^2$, donde A es el área de la sección transversal y r el radio de giro, se tiene

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 EAr^2}{AL^2}$$

o

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \tag{10.13}$$

La cantidad L/r es la *relación de esbeltez* de la columna. Es claro, dado la anotación del párrafo precedente, que el mínimo valor del radio de giro r debe usarse al calcular la relación de esfuerzo y el esfuerzo crítico de la columna.

La ecuación (10.13) muestra que el esfuerzo crítico es proporcional al módulo de elasticidad del material e inversamente proporcional al cuadrado de la relación de esbeltez de la columna. La gráfica de σ_{cr} contra L/r se muestra en la figura 10.9 para el acero estructural, suponiendo $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa. Debe recordarse que al elaborar la gráfica σ_{cr} no se ha usado el factor de seguridad. También se observa que, si el valor obtenido para σ_{cr} de la ecuación (10.13) o de la curva de la figura 10.9 es mayor que el límite de fluencia σ_Y, este valor no es de interés, pues la columna fluirá a compresión y dejará de ser elástica antes de curvarse.

† Recuerde que la ecuación $d^2y/dx^2 = M/EI$ se obtuvo en la sección 9.3 suponiendo que la pendiente dy/dx de la viga podía despreciarse y que la expresión exacta dada en la ecuación (9.3) para la curvatura de una viga, podía remplazarse por $1/\rho = d^2y/dx^2$.

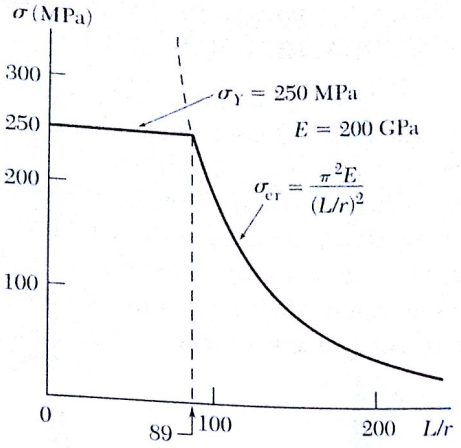


Figura 10.9

El análisis del comportamiento de una columna se ha basado hasta aquí en la hipótesis de una carga céntrica perfectamente alineada. En la práctica, este caso es raro por lo que en la sección 10.5 se tendrá en cuenta el efecto de la excentricidad de la carga. Este método nos conducirá a una transición más suave de la falla por curvatura de columnas largas y delgadas a la falla por compresión de columnas cortas. También dará una visión más realista entre la relación de esbeltez de una columna y la carga que la hace fallar.

EJEMPLO 10.01

Una columna articulada de 2 m de longitud y sección cuadrada debe hacerse de madera. Suponiendo $E = 13$ GPa y $\sigma_{perm} = 12$ MPa y usando un factor de seguridad de 2.5, para calcular la carga crítica de pandeo de Euler, determine el tamaño de la sección transversal si la columna debe soportar: *a*) una carga de 100 kN, *b*) una carga de 200 kN.

a) Carga de 100 kN. Usando el factor de seguridad especificado.

$$P_{cr} = 2.5(100\text{ kN}) = 250\text{ kN} \qquad L = 2\text{ m} \qquad E = 13\text{ GPa}$$

según la fórmula de Euler (10.11) y resolviendo para I,

$$I = \frac{P_{cr}L^2}{\pi^2 E} = \frac{(250 \times 10^3\text{ N})(2\text{ m})^2}{\pi^2(13 \times 10^9\text{ Pa})} = 7.794 \times 10^{-6}\text{ m}^4$$

Pero $I = a^4/12$, por tratarse de un cuadrado de lado a; entonces

$$\frac{a^4}{12} = 7.794 \times 10^{-6}\text{ m}^4 \qquad a = 98.3\text{ mm} \approx 100\text{ mm}$$

Se verifica el valor del esfuerzo normal de la columna:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{100\text{ kN}}{(0.100\text{ m})^2} = 10\text{ MPa}$$

Ya que σ es menor que el esfuerzo permisible, una sección transversal de 100 × 100 mm es aceptable.

b) Carga de 200 kN. Resolviendo de nuevo la ecuación (10.11) para I, pero haciendo $P_{cr} = 2.5(200) = 500$ kN, se tiene

$$I = 15.588 \times 10^{-6}\text{ m}^4$$

$$\frac{a^4}{12} = 15.588 \times 10^{-6} \qquad a = 116.95\text{ mm}$$

El valor del esfuerzo normal es:

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{200\text{ kN}}{(0.11695\text{ m})^2} = 14.62\text{ MPa}$$

Dado que este valor es mayor que el esfuerzo permisible, las dimensiones obtenidas no son aceptables y debe elegirse una sección con base en su resistencia a compresión. Se escribe

$$A = \frac{P}{\sigma_{perm}} = \frac{200\text{ kN}}{12\text{ MPa}} = 16.67 \times 10^{-3}\text{ m}^2$$

$$a^2 = 16.67 \times 10^{-3}\text{ m}^2 \qquad a = 129.1\text{ mm}$$

Una sección transversal de 130 × 130 mm es aceptable.

10.4 EXTENSIÓN DE LA FÓRMULA DE EULER PARA COLUMNAS CON OTRAS CONDICIONES DE EXTREMO

La fórmula de Euler (10.11) se dedujo en la sección precedente para una columna con extremos articulados. Ahora se estudiará cómo obtener P_{cr} para columnas con diferentes condiciones de extremo.

En el caso de una columna con un extremo libre en A y empotrada en B, con la carga **P** (figura 10.10*a*), se observa que la columna se comportará como la mitad superior de una columna articulada (figura 10.10*b*). La carga crítica para la columna de la figura 10.10*a* es la misma que para la columna articulada de la figura 10.10*b* y puede obtenerse mediante la fórmula de Euler

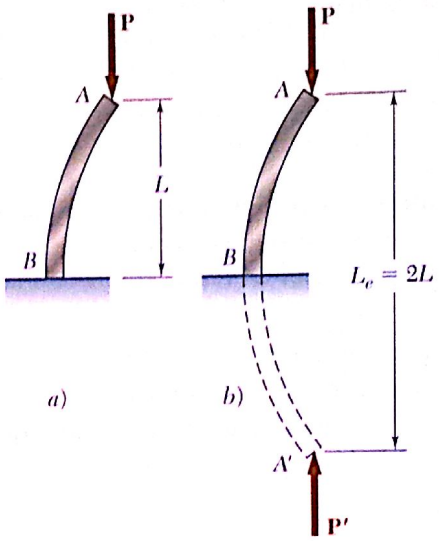


Figura 10.10

(10.11) usando una longitud igual al doble de longitud real L de la columna dada. Se dice que la *longitud efectiva* L_e de la columna de la figura 10.10 es igual a $2L$ y se reemplaza $L_e = 2L$ en la fórmula de Euler:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \tag{10.11'}$$

En forma similar se encuentra el esfuerzo crítico mediante la ecuación

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2} \tag{10.13'}$$

La cantidad L_e/r es la *relación efectiva de esbeltez* de la columna y en el caso considerado aquí, es igual a $2L/r$.

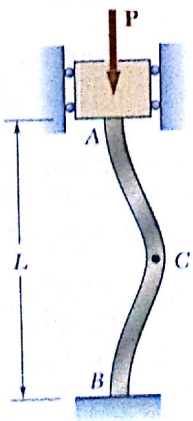


Figura 10.11

Sea una columna con dos extremos empotrados A y B que soporta una carga **P** (figura 10.11). La simetría de los apoyos y de la carga con respecto a un eje horizontal a través del punto medio C requiere que la fuerza cortante en C y los componentes horizontales de las reacciones en A y B sean cero (figura 10.12). Se sigue que las restricciones impuestas sobre la mitad superior AC de la columna por el soporte en A y por la mitad inferior CB son idénticos (figura 10.13). La porción AC debe ser simétrica con respecto a su

punto medio D y éste debe ser un punto de inflexión, con momento flector cero. Un razonamiento similar muestra que el momento flector en el punto medio E de la mitad inferior de la columna también debe ser cero (figura 10.14*a*). Puesto que el momento en los extremos de una columna articulada es cero, se tiene que la porción DE de la columna de la figura 10.14*a* debe conducirse como una columna articulada (figura 10.14*b*). Así se concluye que la longitud efectiva de una columna con dos extremos fijos es $L_e = L/2$.

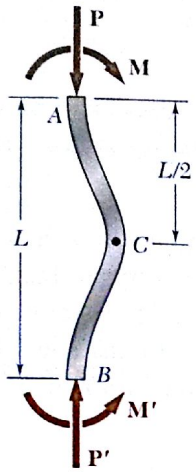


Figura 10.12

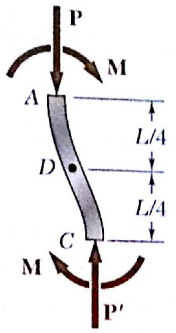


Figura 10.13

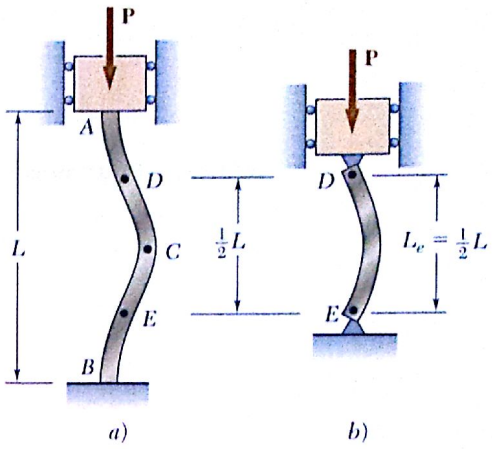


Figura 10.14

En el caso de una columna con un extremo fijo B y un extremo articulado A que sostiene una carga **P** (figura 10.15), deberá escribirse y resolverse la ecuación diferencial de la curva elástica para determinar la longitud efectiva de la columna. En el diagrama de cuerpo libre de la columna entera (figura 10.16), se observa primero que se ejerce una fuerza transversal **V** en el extremo A, además de la fuerza axial **P**, y que **V** es estáticamente indeterminada. Considerando ahora el diagrama de cuerpo libre de una porción AQ de la columna (figura 10.17), se halla que el momento flector en Q es

$$M = -Py - Vx$$

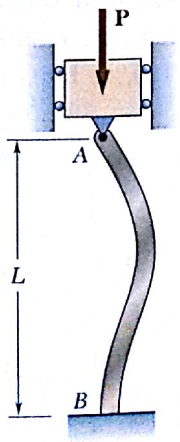


Figura 10.15

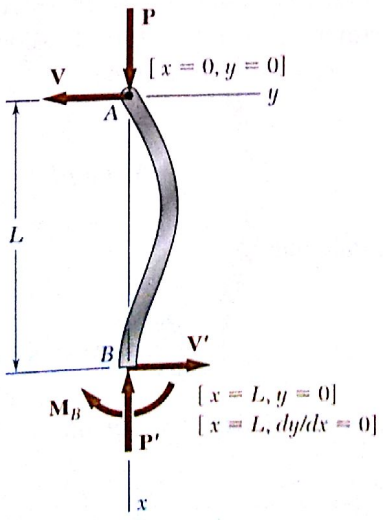


Figura 10.16

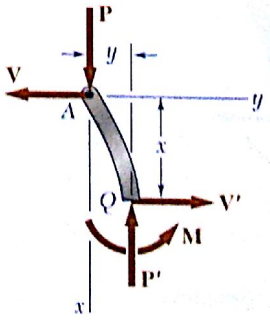


Figura 10.17

Sustituyendo este valor en la ecuación (9.4) de la sección 9.3, se tiene

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y - \frac{V}{EI}x$$

Trasponiendo el término que contiene a y y haciendo

$$p^2 = \frac{P}{EI} \tag{10.6}$$

como se hizo en la sección 10.3, se escribe

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2y = -\frac{V}{EI}x \tag{10.14}$$

Esta ecuación diferencial es lineal, no homogénea y de segundo orden con coeficientes constantes. Al observar que los miembros izquierdos de las ecuaciones (10.7) y (10.14) son idénticos, se concluye que es posible obtener la solución general de ecuación (10.14) añadiendo una solución particular de la ecuación (10.14) a la solución (10.8) obtenida para la ecuación (10.7). Es fácil ver que tal solución es:

$$y = -\frac{V}{p^2EI}x$$

o, recordando (10.6),

$$y = -\frac{V}{P}x \tag{10.15}$$

Añadiendo las soluciones (10.8) y (10.15), la solución general de la ecuación (10.14) se expresa como:

$$y = A \operatorname{sen} px + B \cos px - \frac{V}{P}x \tag{10.16}$$

Las constantes A y B y la magnitud V de la fuerza transversal **V** no conocida se obtienen de las condiciones de frontera indicadas en la figura 10.16. Haciendo primero $x = 0$, $y = 0$ en la ecuación (10.16), se halla que $B = 0$. Haciendo $x = L$, $y = 0$, se obtiene

$$A \operatorname{sen} pL = \frac{V}{P}L \tag{10.17}$$

Finalmente, calculando

$$\frac{dy}{dx} = Ap \cos px - \frac{V}{P}$$

y haciendo, $x = L$, $dy/dx = 0$, resulta

$$Ap \cos pL = \frac{V}{P} \tag{10.18}$$

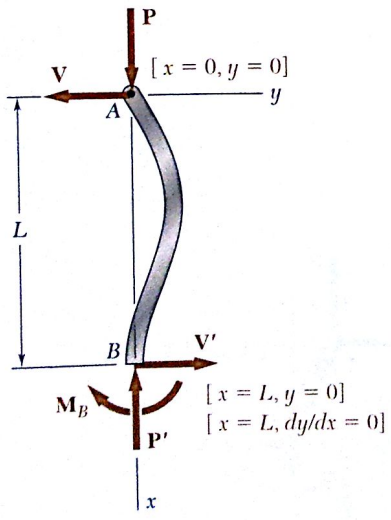


Figura 10.16 (repetida)

Dividiendo miembro a miembro (10.17) entre (10.18), se concluye que una solución de la forma (10.16) puede existir sólo si

$$\tan pL = pL \tag{10.19}$$

Resolviendo esta ecuación por prueba y error, se encuentra que el menor valor de pL que satisface (10.19) es

$$pL = 4.4934 \tag{10.20}$$

Llevando el valor de p definido por la ecuación (10.20) a la ecuación (10.6) y despejando P, se obtiene la carga crítica de la columna de la figura 10.15:

$$P_{cr} = \frac{20.19EI}{L^2} \tag{10.21}$$

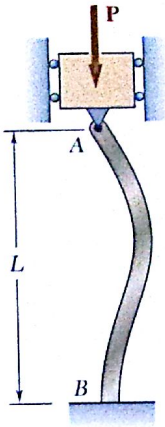


Figura 10.15 (repetida)

La longitud efectiva de la columna se encuentra igualando los miembros de la derecha de las ecuaciones (10.11′) y (10.21):

$$\frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{20.19EI}{L^2}$$

Despejando L_e se obtiene que la longitud efectiva de una columna con un extremo fijo y el otro articulado es $L_e = 0.699L \approx 0.7L$.

En la figura 10.18 se muestran las longitudes efectivas correspondientes a las diferentes condiciones de extremo consideradas en esta sección.

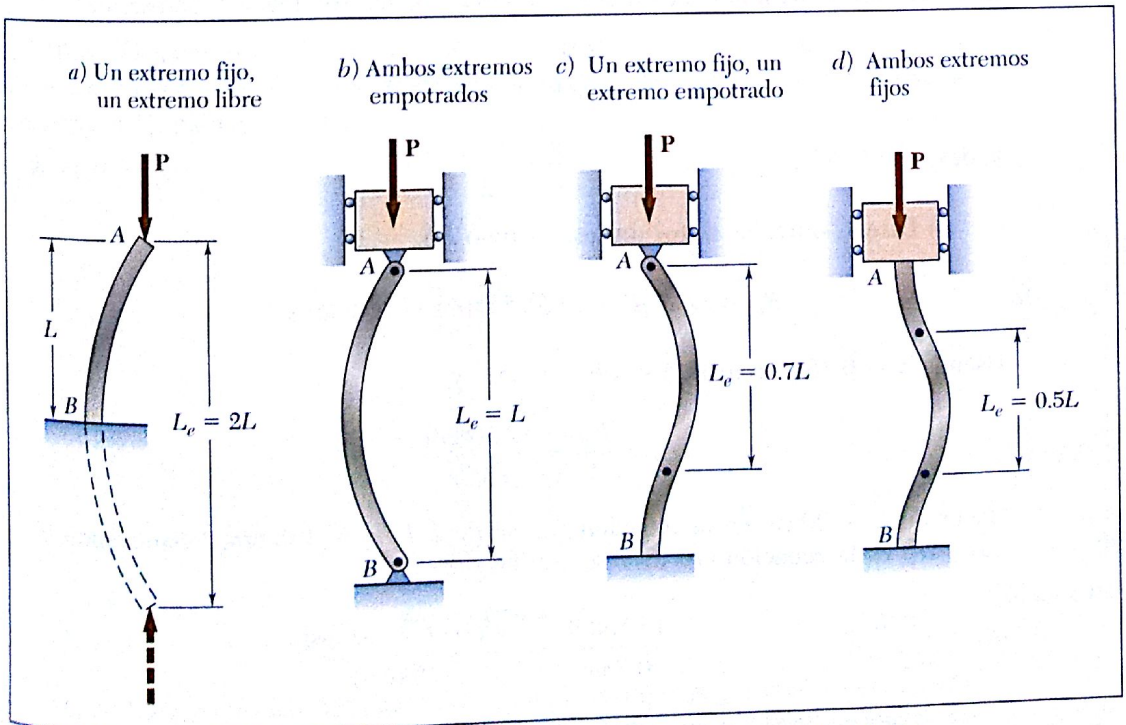
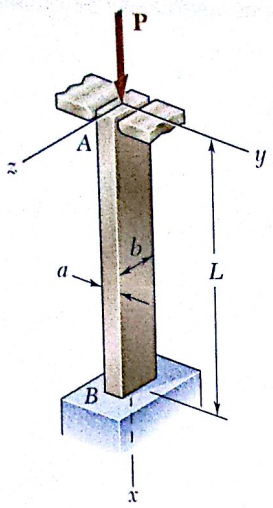


Figura 10.18 Longitudes efectivas de columnas para varias condiciones de extremo.



PROBLEMA MODELO 10.1

Una columna de aluminio, de longitud L y sección transversal rectangular, tiene un extremo fijo B y soporta una carga céntrica en A. Dos placas lisas y redondeadas restringen el movimiento del extremo A en uno de los planos verticales de simetría de la columna, pero le permiten moverse en el otro plano. *a*) Determine la relación a/b de los lados de la sección correspondiente al diseño más eficiente contra pandeo. *b*) Diseñe la sección transversal más eficiente para la columna, si $L = 20$ in., $E = 10.1 \times 10^6$ psi, $P = 5$ kips, y el factor de seguridad es 2.5.

SOLUCIÓN

Pandeo en el plano *xy*. En la figura 10.18 se observa que la longitud efectiva de la columna con respecto al pandeo en este plano es $L_e = 0.7L$. El radio de giro r_z de la sección transversal se obtiene escribiendo

$$I_x = \tfrac{1}{12}ba^3 \quad A = ab$$

y, como $I_z = Ar_z^2$,

$$r_z^2 = \frac{I_z}{A} = \frac{\frac{1}{12}ba^3}{ab} = \frac{a^2}{12} \qquad r_z = a/\sqrt{12}$$

La relación efectiva de esbeltez de la columna con respecto al pandeo en el plano xy es

$$\frac{L_e}{r_z} = \frac{0.7L}{a/\sqrt{12}} \tag{1}$$

Pandeo en el plano *xz*. La longitud efectiva de la columna con respecto al pandeo en este plano es $L_e = 2L$, y el correspondiente radio de giro es $r_y = b/\sqrt{12}$. Así

$$\frac{L_e}{r_y} = \frac{2L}{b/\sqrt{12}} \tag{2}$$

***a*) Diseño más eficiente.** El diseño más eficiente es aquel para el cual los esfuerzos críticos correspondientes a los dos posibles modos de pandeo son iguales. Refiriéndose a la ecuación (10.13′), se tiene que éste será el caso si los dos valores obtenidos arriba para la relación efectiva de la esbeltez son iguales. Se escribe

$$\frac{0.7L}{a/\sqrt{12}} = \frac{2L}{b/\sqrt{12}}$$

y, despejando a/b,

$$\frac{a}{b} = \frac{0.7}{2} \qquad \frac{a}{b} = 0.35 \blacktriangleleft$$

***b*) Diseño para los datos dados.** Como $F.S. = 2.5$,

$$P_{cr} = (F.S.)P = (2.5)(5 \text{ kips}) = 12.5 \text{ kips}$$

Usando $a = 0.35b$, se tiene $A = ab = 0.35b^2$ y

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A} = \frac{12\,500 \text{ lb}}{0.35b^2}$$

Haciendo $L = 20$ in. en la ecuación (2), se tiene $L_e/r_y = 138.6/b$. Sustituyendo E, L_e/r y σ_{cr} en la ecuación (10.13′), se escribe

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L_e/r)^2} \qquad \frac{12\,500 \text{ lb}}{0.35b^2} = \frac{\pi^2(10.1 \times 10^6 \text{ psi})}{(138.6/b)^2}$$

$$b = 1.620 \text{ in.} \qquad a = 0.35b = 0.567 \text{ in.} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

10.1 Si se sabe que el resorte de torsión en B es de constante K y que la barra AB es rígida, determine la carga crítica P_{cr}.

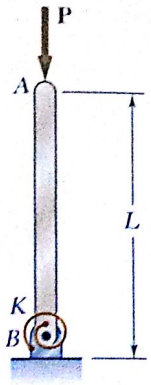


Figura P10.1

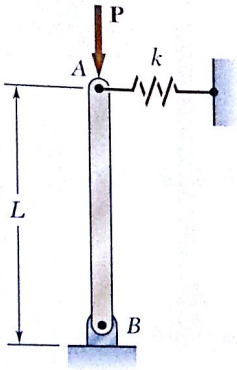


Figura P10.2

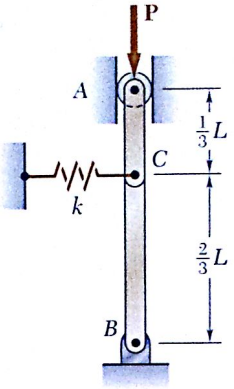


Figura P10.3

10.2 Si se sabe que el resorte en A es de constante k y que la barra AB es rígida, determine la carga crítica P_{cr}.

10.3 Dos barras rígidas AC y BC están conectadas a un resorte de constante k como se muestra en la figura. Si se sabe que el resorte puede actuar a tensión o a compresión, determine la carga crítica P_{cr} para el sistema.

10.4 Dos barras rígidas AC y BC están conectadas por un pasador en C, como se muestra en la figura. Si el resorte de torsión en B es de constante K, determine la carga crítica P_{cr} para el sistema.j

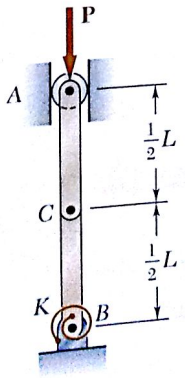


Figura P10.4

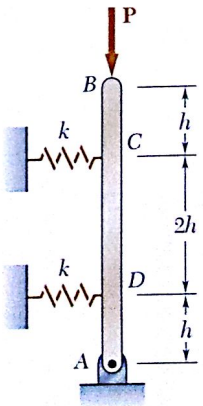


Figura *P10.5*

10.5 La barra rígida AB está unida a una bisagra en A y a dos resortes, cada uno de constante $k = 2$ kips/in., que pueden actuar a tensión o a compresión. Si se sabe que $h = 2$ ft, determine la carga crítica.

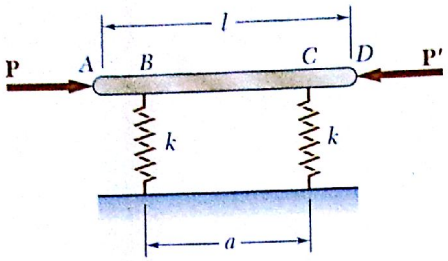


Figura *P10.6*

10.6 La barra rígida AD está unida a dos resortes de constante k y está en equilibrio en la posición mostrada en la figura. Si se sabe que las fuerzas iguales y opuestas **P** y **P′** *permanecen horizontales*, determine la magnitud P_{cr} de la carga crítica para el sistema.

10.7 La barra rígida AB está unida a la bisagra en A y a dos resortes, cada uno de constante k. Si $h = 450$ mm, $d = 300$ mm y $m = 200$ kg, determine el rango de valores de k para el cual el equilibrio de la barra rígida AB es estable en la posición que se muestra en la figura. Cada resorte puede actuar a tensión o a compresión.

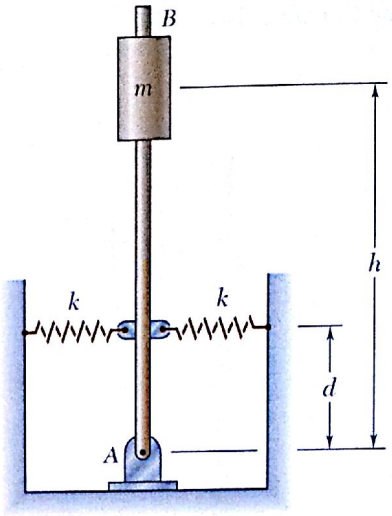


Figura P10.7

10.8 Un marco se compone de cuatro elementos en L conectados por cuatro resortes de torsión, cada uno de los cuales tiene una constante K. Si se aplican cargas de igual magnitud **P** en los puntos A y D, como se muestra en la figura, calcule el valor crítico P_{cr} de las cargas que se aplican al marco.

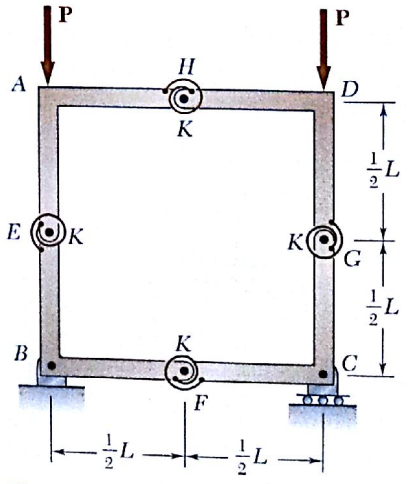


Figura P10.8

10.9 Determine la carga crítica de una tabla de madera con 1 m de largo, la cual tiene una sección transversal rectangular de 7 × 24 mm. Utilice $E = 12$ GPa.

10.10 Determine la carga crítica de una pieza redonda de madera con longitud de 0.9 m y diámetro de *a*) 10 mm, *b*) 15 mm. Utilice $E = 12$ GPa.

10.11 Determine la dimensión d tal que las barras de aluminio y acero tengan el mismo peso, y calcule la carga crítica para cada barra.

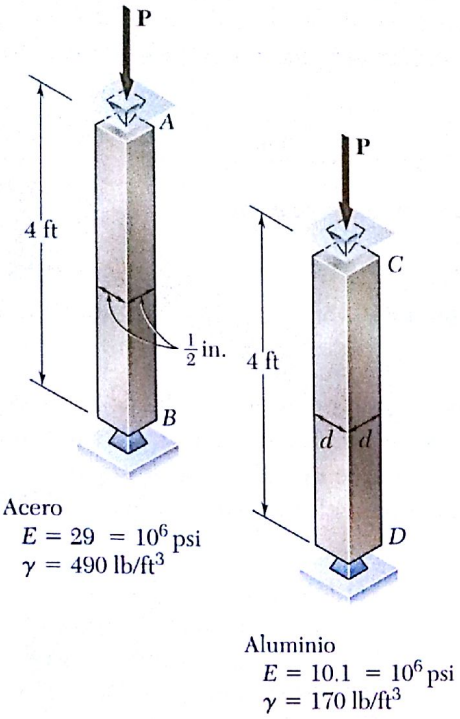


Figura P10.11 y P10.12

10.12 Determine *a*) la carga crítica para la barra de acero, *b*) la dimensión d tal que la barra de aluminio tenga la misma carga crítica, *c*) exprese el peso de la pieza de aluminio como un porcentaje del peso de la barra de acero.

10.13 Un elemento a compresión de 1.5 m de longitud efectiva consta de una barra de latón de 30 mm de diámetro. Para reducir el peso 25%, se reemplaza por una barra hueca con la sección transversal mostrada en la figura. Determine *a*) la reducción porcentual en la carga crítica, *b*) el valor de la carga crítica para la barra hueca. Considere $E = 105$ GPa.

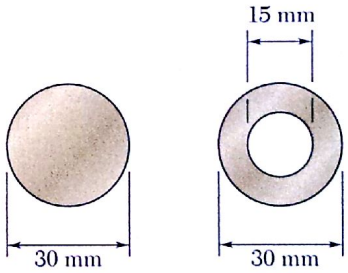


Figura P10.13

10.14 Una columna de longitud efectiva L puede construirse pegando tablas idénticas en cada uno de los arreglos que se muestran en la figura. Determine la relación entre la carga crítica que se obtiene con el arreglo *a*) y la carga crítica que se logra con el arreglo *b*).

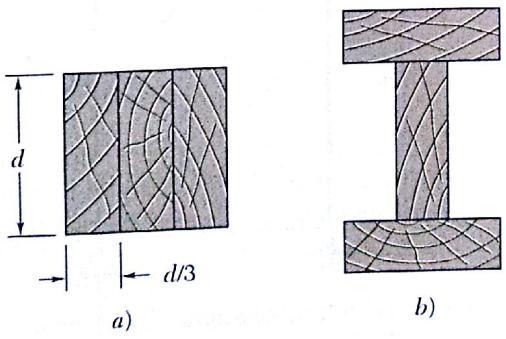


Figura *P10.14*

10.15 Se desea construir una columna de 6 m de longitud efectiva, para ello se usarán tres placas como se muestra en la figura. Utilice $E = 200$ GPa para determinar el factor de seguridad respecto del pandeo para una carga céntrica de 16 kN.

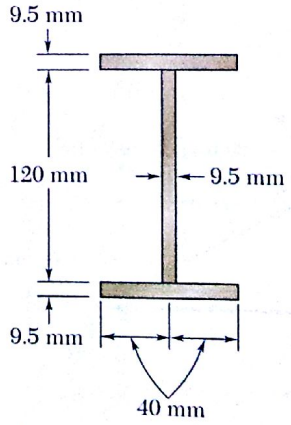


Figura P10.15

10.16 y 10.17 Un elemento a compresión de 12 ft de longitud efectiva se construyó soldando dos ángulos de acero de $4 \times 3 \times \frac{1}{4}$ in., como se muestra en la figura. Si $E = 29 \times 10^6$ psi, determine la carga céntrica permisible para el elemento si el factor de seguridad requerido es de 2.5.

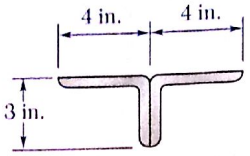


Figura P10.16

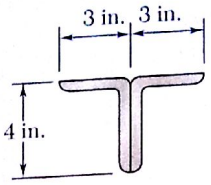


Figura P10.17

10.18 Un elemento a compresión sencilla de 8.2 m de longitud efectiva se obtiene al conectar dos canales de acero C200 × 17.1 con barras de enlace, como se muestra en la figura. Si se sabe que el factor de seguridad es de 1.85, determine la carga céntrica permisible para el elemento. Utilice $E = 200$ GPa y $d = 100$ mm.

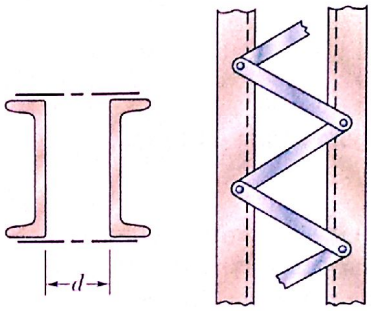


Figura *P10.18*

10.19 Los elementos *AB* y *CD* son barras de acero de 30 mm de diámetro y los elementos *BC* y *AD* son barras de acero de 22 mm de diámetro. Al apretar el torniquete, se tensa el elemento diagonal *AC*. Si se requiere un factor de seguridad respecto del pandeo de 2.75, determine la máxima tensión permisible en *AC*. Utilice $E = 200$ GPa y considere pandeo sólo en el plano de la estructura.

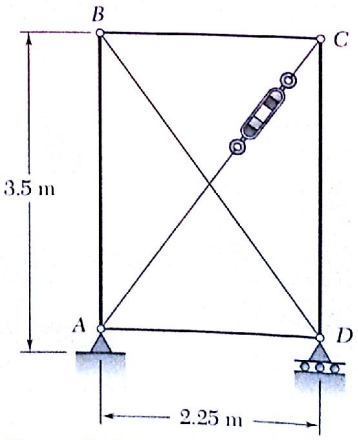


Figura *P10.19*

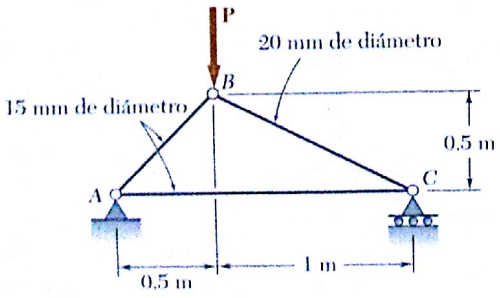


Figura P10.20

10.20 Si se necesita un factor de seguridad de 2.6, determine la carga **P** máxima que puede aplicarse a la estructura que se muestra en la figura. Utilice $E = 200$ GPa y considere sólo el pandeo en el plano de la estructura.

10.21 La barra uniforme de aluminio AB tiene una sección transversal rectangular de 20 × 36 mm y está apoyada mediante pasadores y ménsulas, como se muestra en la figura. Cada extremo de la barra puede rotar libremente alrededor de un eje horizontal a través del pasador, pero la rotación respecto del eje vertical se evita por medio de las ménsulas. Si se utiliza $E = 70$ GPa, determine la carga céntrica permisible **P** si se requiere un factor de seguridad de 2.5.

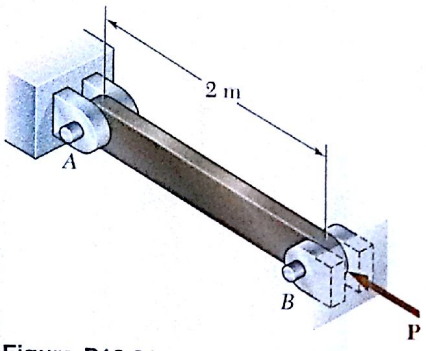


Figura P10.21

10.22 La columna AB soporta una carga céntrica **P** con magnitud de 15 kips. Los cables BC y BD están tensos y evitan el movimiento del punto B en el plano xz. Con la fórmula de Euler y un factor de seguridad de 2.2 y despreciando la tensión en los cables, determine la máxima longitud permisible L. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

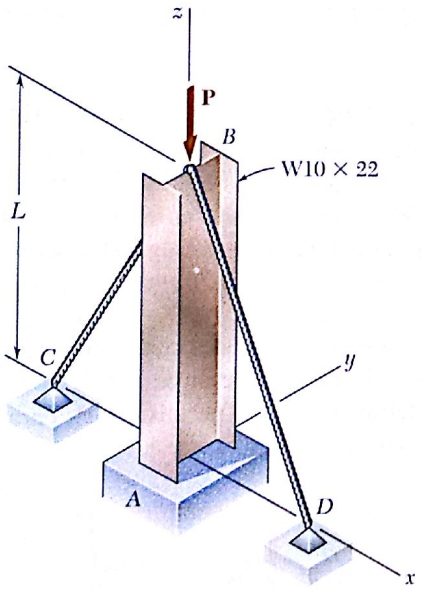


Figura *P10.22*

10.23 Un perfil de acero laminado W8 × 21 se utiliza con el arreglo de apoyo y cable que se muestra en el problema 10.22. Si se sabe que $L = 24$ ft, determine la carga céntrica permisible **P** cuando se desea un factor de seguridad de 2.2. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

10.24 Un puntal cuadrado de aluminio de 1 in. se mantiene en la posición que se observa en la figura gracias a un anclaje en el punto A y por un conjunto de apoyos móviles en B y C, los cuales impiden la rotación del puntal en el plano de la figura. Si se sabe que $L_{AB} = 3$ ft, determine *a*) los valores máximos de L_{BC} y L_{CD} que pueden usarse si la carga permisible **P** debe ser lo más grande posible, *b*) la magnitud de la carga permisible correspondiente. Considere sólo el pandeo en el plano de la figura y use $E = 10.4 \times 10^6$ psi.

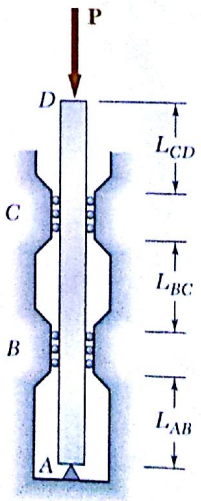


Figura P10.24

10.25 La columna *ABC* tiene una sección transversal rectangular uniforme con $b = 12$ mm y $d = 22$ mm. La columna se sostiene en el plano xz en su punto medio C y recibe una fuerza céntrica **P** con magnitud de 3.8 kN. Si se sabe que el factor de seguridad requerido es de 3.2, determine la máxima longitud permisible L. Utilice $E = 200$ GPa.

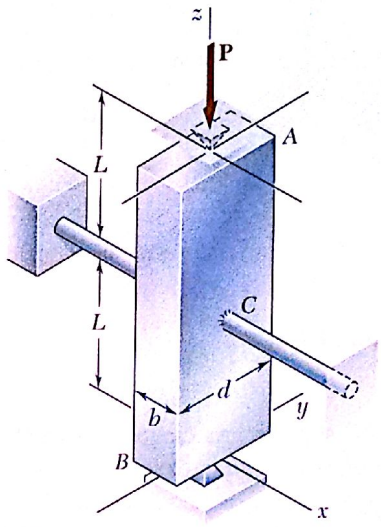


Figura P10.25 y P10.26

10.26 La columna *ABC* tiene una sección transversal rectangular uniforme y se encuentra apoyada en el plano xz en su punto medio C. *a*) Determine la relación b/d para la cual el factor de seguridad es el mismo respecto del pandeo en los planos xz y yz. *b*) Con la relación encontrada en el inciso *a*), diseñe la sección transversal de la columna para la cual el factor de seguridad será 3.0, cuando $P = 4.4$ kN, $L = 1$ m y $E = 200$ GPa.

10.27 Cada uno de los cinco puntales consisten en un tubo de aluminio de 32 mm de diámetro exterior y 4 mm de espesor de pared. Con $E = 70$ GPa y un factor de seguridad de 2.3, determine la carga permisible $\mathbf{P}_0$ para cada una de las condiciones de apoyo que se muestran en la figura.

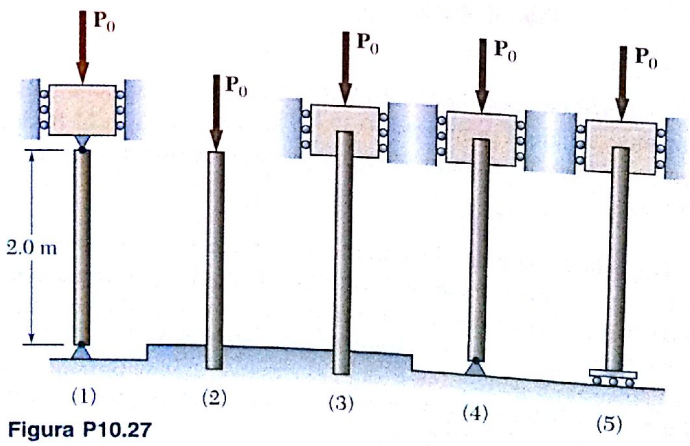


Figura P10.27

10.28 Se emplean dos columnas para sostener un bloque que pesa 3.25 kips, en cada uno de los modos que se muestran en la figura. *a*) Si se sabe que la columna de la figura (1) es de acero con un diámetro de 1.25 in., determine el factor de seguridad respecto del pandeo para la carga que se ilustra. *b*) Determine el diámetro de cada una de las columnas restantes para las cuales el factor de seguridad es el mismo que el que se obtuvo en el inciso anterior. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

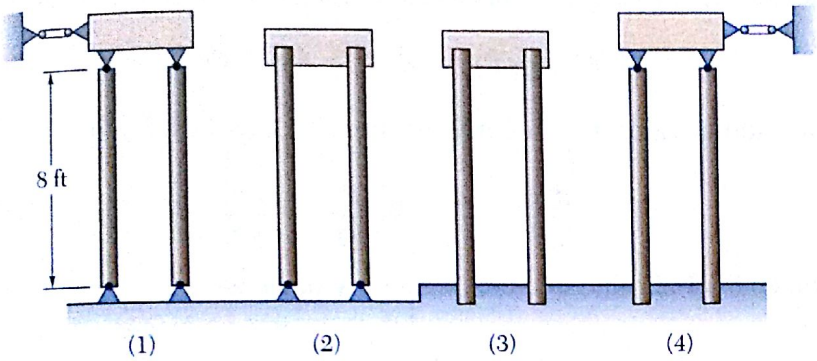
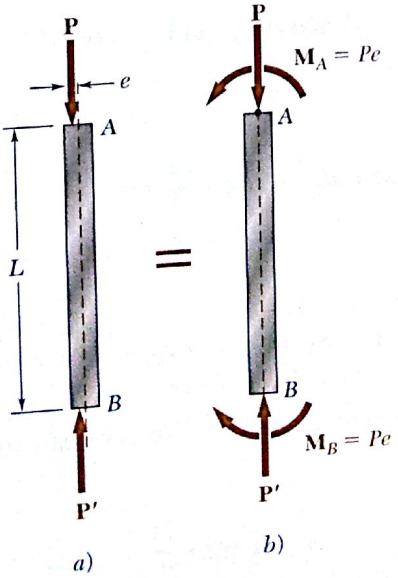


Figura P10.28

*10.5 CARGA EXCÉNTRICA. FÓRMULA DE LA SECANTE

En esta sección se estudiará el problema del pandeo de las columnas en una forma diferente, esto es, observando que la carga **P** aplicada a una columna nunca es perfectamente céntrica. Llamando e a la excentricidad de la carga, es decir, a la distancia que hay entre la línea de acción de **P** y el eje de la columna (figura 10.19*a*), la carga excéntrica dada se reemplaza por una fuerza céntrica **P** y un par $\mathbf{M}_A$ de momento $M_A = Pe$ (figura 10.19*b*). Es claro que, sin importar lo pequeñas que sean la carga **P** y la excentricidad e, el par $\mathbf{M}_A$ causará alguna flexión en la columna (figura 10.20). A medida que la carga excéntrica



a) *b*)

Figura 10.19

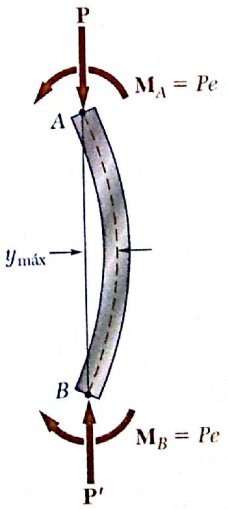


Figura 10.20

se incrementa, tanto el par $\mathbf{M}_A$ como la fuerza axial $\mathbf{P}$ aumentan y ambos provocan que la columna se flexione más. Visto así, el problema del pandeo no es cuestión de determinar cuánto tiempo la columna va a permanecer recta y estable bajo una carga creciente, sino cuánto puede flexionarse la columna bajo carga creciente, sin que el esfuerzo permisible sea excedido y sin que la deflexión máxima $y_{máx}$ sea excesiva.

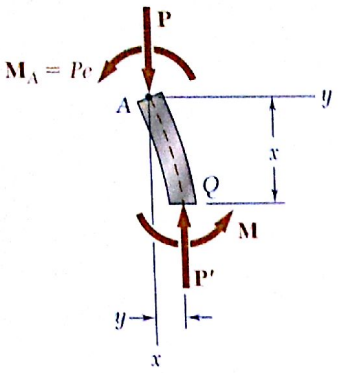


Figura 10.21

Primero se escribirá y resolverá la ecuación diferencial de la curva elástica, procediendo como en las secciones 10.3 y 10.4. Dibujando el diagrama de cuerpo libre de una porción AQ de la columna y escogiendo los ejes, como se muestra (figura 10.21), se halla que el momento flector en Q es

$$M = -Py - M_A = -Py - Pe \tag{10.22}$$

Sustituyendo el valor de M en la ecuación (9.4), de la sección 9.3

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y - \frac{Pe}{EI}$$

Trasponiendo el término que contiene a y y haciendo

$$p^2 = \frac{P}{EI} \tag{10.6}$$

como se hizo antes, se tiene

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2y = -p^2e \tag{10.23}$$

Como el lado izquierdo de esta ecuación es el mismo de la ecuación (10.7) que se resolvió en la sección 10.3, la solución general de la ecuación (10.23) será

$$y = A \operatorname{sen} px + B \cos px - e \tag{10.24}$$

donde el último término es una solución particular de la ecuación (10.23).

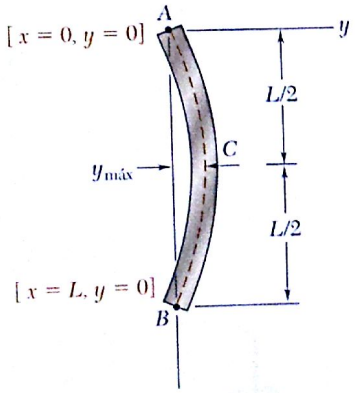


Figura 10.22

Las constantes A y B se obtienen de las condiciones de frontera de la figura 10.22. Haciendo $x = 0$, $y = 0$ en la ecuación (10.24), se tiene

$$B = e$$

Haciendo luego $x = L$, $y = 0$, se escribe

$$A \operatorname{sen} pL = e(1 - \cos pL) \tag{10.25}$$

Recordando que

$$\operatorname{sen} pL = 2 \operatorname{sen} \frac{pL}{2} \cos \frac{pL}{2}$$

y

$$1 - \cos pL = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{pL}{2}$$

y sustituyendo en la ecuación (10.25), se obtiene, luego de las simplificaciones

$$A = e \tan \frac{pL}{2}$$

Sustituyendo A y B en la ecuación (10.24), se obtiene la ecuación de la curva elástica:

$$y = e\left(\tan\frac{pL}{2}\operatorname{sen} px + \cos px - 1\right) \tag{10.26}$$

El valor de la deflexión máxima se halla haciendo $x = L/2$ en la ecuación (10.26). Se tiene

$$y_{\text{máx}} = e\left(\tan\frac{pL}{2}\operatorname{sen}\frac{pL}{2} + \cos\frac{pL}{2} - 1\right)$$

$$= e\left(\frac{\operatorname{sen}^2\frac{pL}{2} + \cos^2\frac{pL}{2}}{\cos\frac{pL}{2}} - 1\right)$$

$$y_{\text{máx}} = e\left(\sec\frac{pL}{2} - 1\right) \tag{10.27}$$

Recordando la ecuación (10.6), se escribe

$$y_{\text{máx}} = e\left[\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right) - 1\right] \tag{10.28}$$

Nótese en la expresión obtenida que $y_{\text{máx}}$ se vuelve infinita cuando

$$\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2} = \frac{\pi}{2} \tag{10.29}$$

Aunque la deflexión no se hace infinita realmente, sin embargo, se vuelve inaceptablemente grande y P no debe llegar al valor crítico que satisface la ecuación (10.29). Resolviendo (10.29) para P se tiene que es el valor

$$P_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{10.30}$$

que se halló en la sección 10.3 para una columna con carga céntrica. Resolviendo (10.30) para EI y reemplazando en (10.28), la deflexión máxima puede expresarse en la forma alternativa

$$y_{\text{máx}} = e\left(\sec\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{\text{cr}}}} - 1\right) \tag{10.31}$$

El esfuerzo máximo $\sigma_{\text{máx}}$ ocurre en la sección de la columna en donde el momento flector es máximo, es decir, en la sección transversal a través del punto medio C y se obtiene sumando los esfuerzos normales debidos, respectivamente, a la fuerza axial y al momento flector ejercido en esa sección (véase sección 4.12). Se tiene

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\text{máx}}c}{I} \tag{10.32}$$

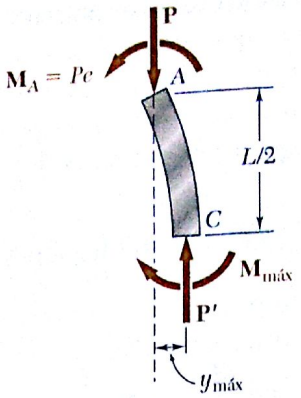


Figura 10.23

Del diagrama de cuerpo libre de la porción AC de la columna (figura 10.23), se halla que:

$$M_{máx} = Py_{máx} + M_A = P(y_{máx} + e)$$

Sustituyendo este valor en (10.32) y recordando que $I = Ar^2$, se escribe

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{(y_{máx} + e)c}{r^2}\right] \tag{10.33}$$

Sustituyendo por $y_{máx}$ el valor obtenido en (10.28),

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right)\right] \tag{10.34}$$

Una forma alternativa para $\sigma_{máx}$ se obtiene sustituyendo $y_{máx}$ de (10.31) en (10.33). Así

$$\sigma_{máx} = \frac{P}{A}\left(1 + \frac{ec}{r^2}\sec\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) \tag{10.35}$$

La ecuación obtenida puede usarse con cualquier condición de extremo, siempre que se use el valor apropiado de la carga crítica (véase sección 10.4).

Note que, como $\sigma_{máx}$ no varía linealmente con la carga P, el principio de superposición no se emplea en la determinación del esfuerzo debido a la aplicación simultánea de varias cargas; debe calcularse primero la carga resultante y luego puede usarse la ecuación (10.34) o la (10.35) para determinar el esfuerzo correspondiente. Por la misma razón, cualquier factor de seguridad debe aplicarse a la carga y no al esfuerzo.

Haciendo $I = Ar^2$ en la ecuación (10.34) y resolviendo para la relación P/A al frente del paréntesis, se escribe

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{máx}}{1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{P}{EA}}\frac{L_e}{r}\right)} \tag{10.36}$$

en donde la longitud efectiva se utiliza para lograr que la fórmula sea aplicable a varias condiciones de extremo. Ésta es *la fórmula de la secante*, la cual define la fuerza por unidad de área, P/A, que causa un esfuerzo máximo

especificado $\sigma_{máx}$ en una columna con relación efectiva de esbeltez, L_e/r, para un valor dado de la relación ec/r^2, donde e es la excentricidad de la carga aplicada. Note que como P/A aparece en ambos miembros, es necesario recurrir a un método de prueba y error para resolver la ecuación trascendental y obtener el valor de P/A correspondiente a una columna y condiciones de carga dadas.

La ecuación (10.36) se utilizó para dibujar las curvas de la figura 10.24*a* y *b* para una columna de acero, suponiendo que los valores de E y σ_Y son los mostrados en la figura. Estas curvas permiten calcular la carga por unidad de área P/A, que hace fluir a la columna para valores dados de las relaciones L_e/r y ec/r^2.

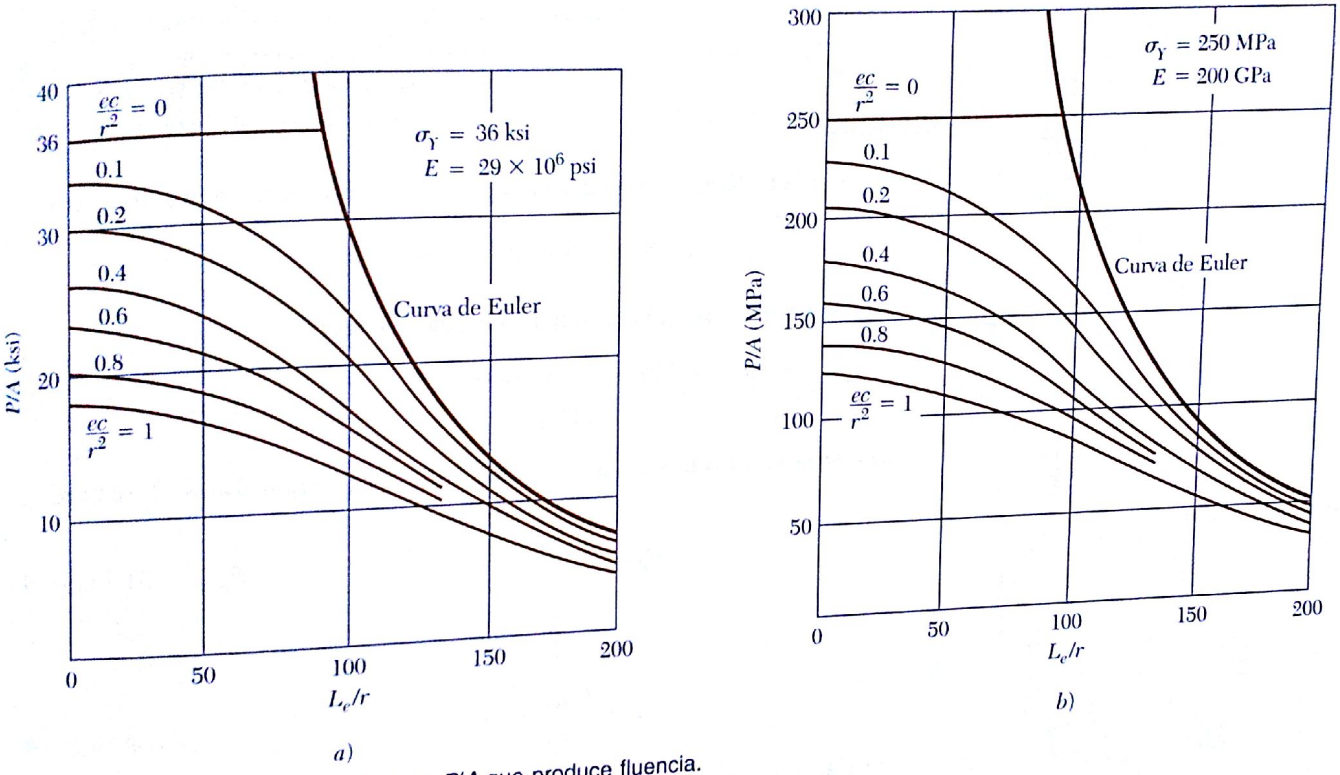


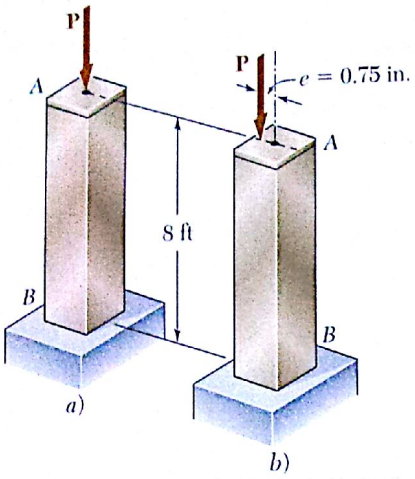
Figura 10.24 Carga por unidad de área P/A que produce fluencia.

Note que para pequeños valores de L_e/r, la secante es casi 1 en la ecuación (10.36) y P/A puede suponerse igual a

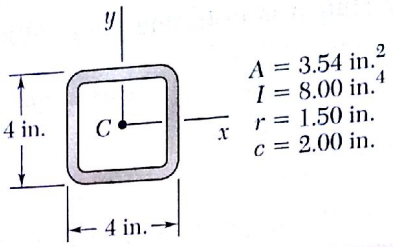
$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{máx}}{1 + \dfrac{ec}{r^2}} \tag{10.37}$$

un valor que pudo obtenerse despreciando el efecto de la deflexión lateral de la columna y usando el método de la sección 4.12. Por otra parte, en la figura 10.24 se observa que para valores grandes de L_e/r, las curvas correspondientes a los diferentes valores de ec/r^2 se acercan mucho a la curva de Euler definida por la ecuación (10.13′) y así, el efecto de la excentricidad de la carga en el valor de P/A es despreciable. La fórmula de la secante es útil, sobre todo, para valores intermedios de L_e/r. Sin embargo, para usarla con eficiencia, debe conocerse el valor e de la excentricidad de la carga y esta cantidad, desafortunadamente, rara vez se conoce con algún grado de precisión.

PROBLEMA MODELO 10.2



La columna uniforme AB consta de una sección de 8 ft de tubo estructural cuya sección se muestra. *a*) Usando la fórmula de Euler y un factor de seguridad de 2, halle la carga céntrica admisible para la columna y el correspondiente esfuerzo normal. *b*) Si la carga permisible, hallada en la parte *a*, se aplica como se muestra en un punto a 0.75 in. del eje geométrico de la columna, determine la deflexión horizontal del tope de la columna y el esfuerzo normal máximo en la columna. Considere $E = 29 \times 10^6$ psi.



SOLUCIÓN

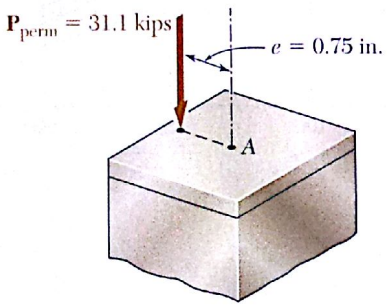
Longitud efectiva. Como la columna tiene un extremo fijo y uno libre, su longitud efectiva es:

$$L_e = 2(8 \text{ ft}) = 16 \text{ ft} = 192 \text{ in.}$$

Carga crítica. Usando la fórmula de Euler, se escribe

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} = \frac{\pi^2(29 \times 10^6 \text{ psi})(8.00 \text{ in.}^4)}{(192 \text{ in.})^2} \qquad P_{cr} = 62.1 \text{ kips}$$

***a*) Carga admisible y esfuerzo.** Para un factor de seguridad de 2, se tiene

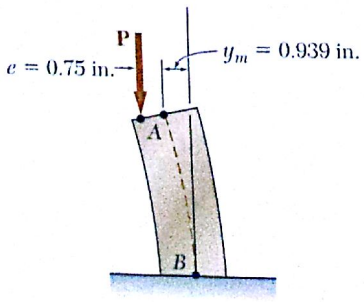


$$P_{perm} = \frac{P_{cr}}{F.S.} = \frac{62.1 \text{ kips}}{2} \qquad P_{perm} = 31.1 \text{ kips} \blacktriangleleft$$

y

$$\sigma = \frac{P_{perm}}{A} = \frac{31.1 \text{ kips}}{3.54 \text{ in.}^2} \qquad \sigma = 8.79 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

***b*) Carga excéntrica.** Observe que la columna AB y su carga son idénticas a la mitad superior de la columna de la figura 10.19 que se utilizó en la deducción de las fórmulas de la secante; se concluye que las fórmulas de la sección 10.5 se aplican directamente al presente caso. Recordando que $P_{perm}/P_{cr} = \frac{1}{2}$ y usando la ecuación (10.31), se calcula la deflexión horizontal del punto A:



$$y_m = e\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right) - 1\right] = (0.75 \text{ in.})\left[\sec\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right) - 1\right]$$

$$= (0.75 \text{ in.})(2.252 - 1)$$

$$y_m = 0.939 \text{ in.} \blacktriangleleft$$

El máximo esfuerzo normal se obtiene de la ecuación (10.35):

$$\sigma_m = \frac{P}{A}\left[1 + \frac{ec}{r^2}\sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_{cr}}}\right)\right]$$

$$= \frac{31.1 \text{ kips}}{3.54 \text{ in.}^2}\left[1 + \frac{(0.75 \text{ in.})(2 \text{ in.})}{(1.50 \text{ in.})^2}\sec\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}\right)\right]$$

$$= (8.79 \text{ ksi})[1 + 0.667(2.252)]$$

$$\sigma_m = 22.0 \text{ ksi} \blacktriangleleft$$

10.29 La línea de acción de una carga axial de 75 kip es paralela al eje geométrico de la columna AB e interseca el eje x en $x = 0.6$ in. Si $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) la deflexión horizontal del punto medio C de la columna, *b*) el esfuerzo máximo correspondiente en la columna.

10.30 Se aplica una carga axial **P** con magnitud de 560 kN en un punto sobre el eje x, dicho punto se encuentra a una distancia $e = 6$ mm del eje geométrico de la columna BC fabricada con acero laminado W200 × 46.1. Si $E = 200$ GPa, determine *a*) la deflexión horizontal del extremo C, *b*) el esfuerzo máximo en la columna.

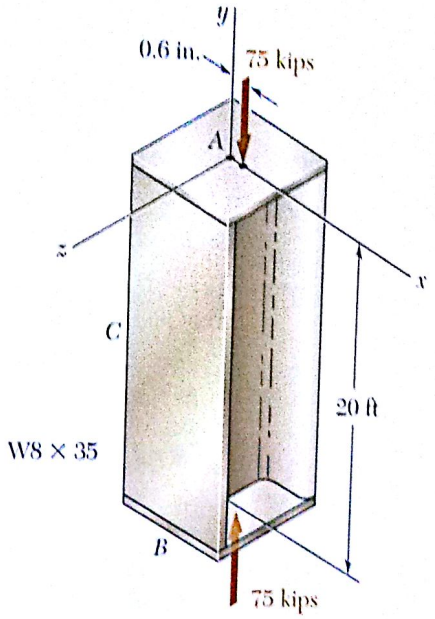


Figura P10.29

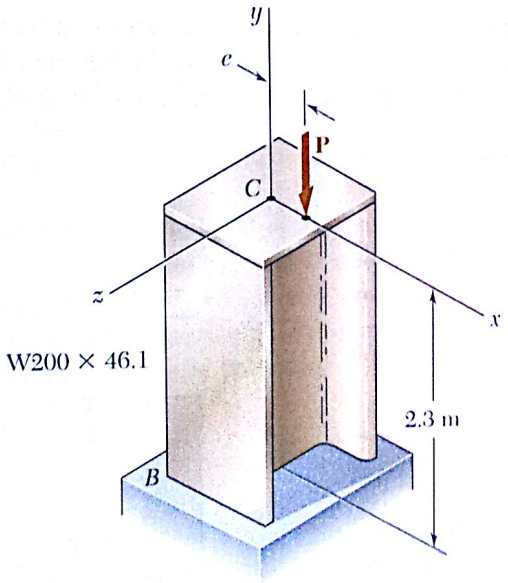


Figura P10.30

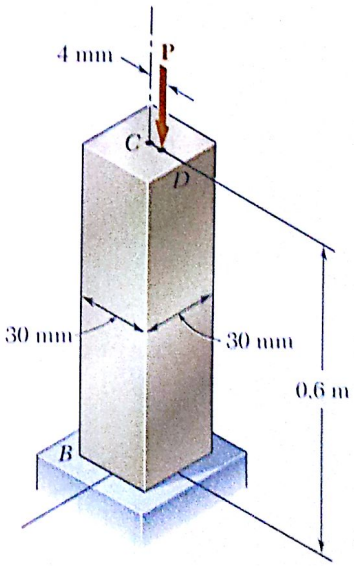


Figura *P10.31*

10.31 Se aplica una carga axial **P** = 15 kN sobre el punto D que está a 4 mm del eje geométrico de la barra cuadrada de aluminio BC. Si $E = 70$ GPa, determine *a*) la deflexión horizontal del extremo C, *b*) el esfuerzo máximo en la columna.

10.32 Se aplica una carga axial **P** a la varilla de acero AB con un diámetro de 1.375 in. que se muestra en la figura. Para $P = 21$ kips se observa que la deflexión horizontal del punto medio C es 0.03 in. Si $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) la excentricidad e de la carga, *b*) el esfuerzo máximo en la varilla.

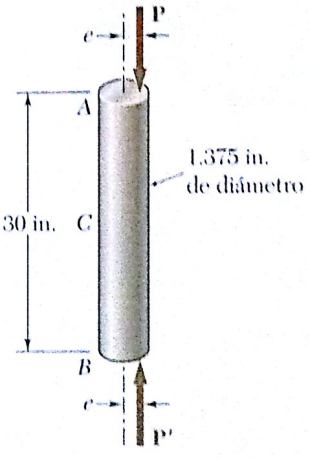


Figura P10.32

10.33 Se aplica una carga axial **P** a la barra cuadrada de aluminio *BC* con 32 mm de lado, como se indica en la figura. Cuando $P = 24$ kN, la deflexión horizontal en el extremo *C* es de 4 mm. Con $E = 70$ GPa, determine *a*) la excentricidad e de la carga, *b*) el esfuerzo máximo en la barra.

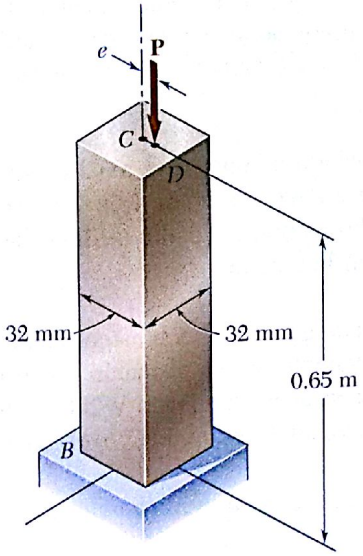


Figura P10.33

10.34 Se aplica la carga axial **P** en un punto ubicado sobre el eje *x* a una distancia e del eje geométrico de la columna *BC* de acero laminado. Cuando $P = 350$ kN, la deflexión horizontal de la parte superior de la columna es de 5 mm. Con $E = 200$ GPa, determine *a*) la excentricidad e de la carga, *b*) el esfuerzo máximo en la columna.

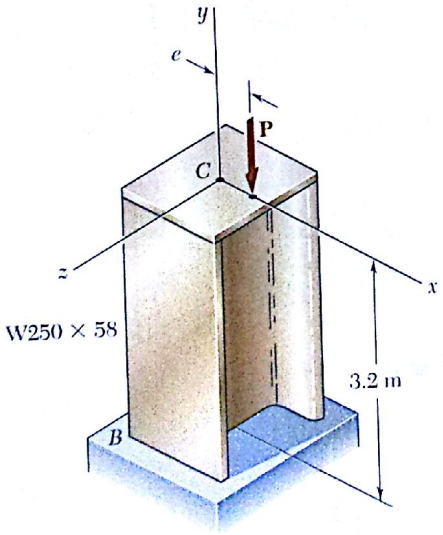


Figura *P10.34*

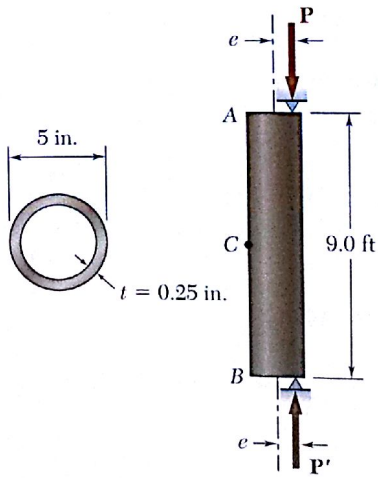


Figura P10.35

10.35 Un tubo de latón que tiene la sección transversal que se ilustra en la figura recibe una carga axial **P** que se aplica a 0.15 in. de su eje geométrico. Con $E = 17 \times 10^6$ psi, determine *a*) la carga **P** para la cual la deflexión horizontal en el punto medio *C* es de 0.20 in., *b*) el esfuerzo máximo correspondiente en la columna.

10.36 Retome el problema 10.35, y ahora suponga que la carga axial **P** se aplica a 0.3 in. del eje geométrico de la columna.

10.37 Se aplica una carga axial **P** en un punto ubicado sobre el eje x a una distancia $e = 0.5$ in. del eje geométrico de la columna BC de acero laminado con perfil W10 × 39. Considerando $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) la carga **P** para la cual la deflexión horizontal de la parte superior de la columna es de 0.6 in., *b*) el esfuerzo máximo correspondiente en la columna.

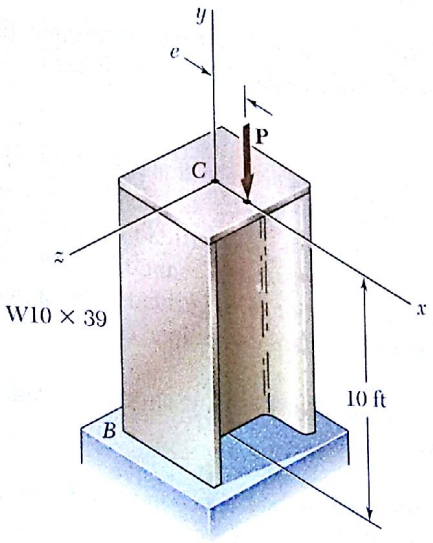


Figura *P10.37*

10.38 La línea de acción de una carga axial **P** es paralela al eje geométrico de la columna AB e interseca al eje x en $x = 0.8$ in. Con $E = 29 \times 10^6$ psi, determine *a*) la carga **P** para la cual la deflexión horizontal del punto medio C de la columna es de 0.5 in., *b*) el esfuerzo máximo correspondiente en la columna.

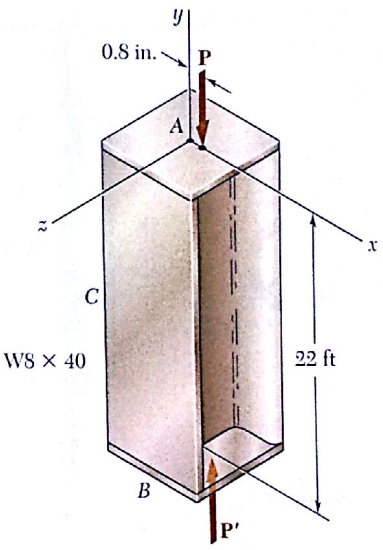


Figura *P10.38*

10.39 Se aplica una carga axial **P** en un punto ubicado sobre el eje x a una distancia $e = 12$ mm del eje geométrico de la columna BC de acero laminado con perfil W310 × 60. Suponga que $L = 3.5$ m y con $E = 200$ GPa, determine *a*) la carga **P** para la cual la deflexión horizontal en el extremo C es de 15 mm, *b*) el esfuerzo máximo correspondiente en la columna.

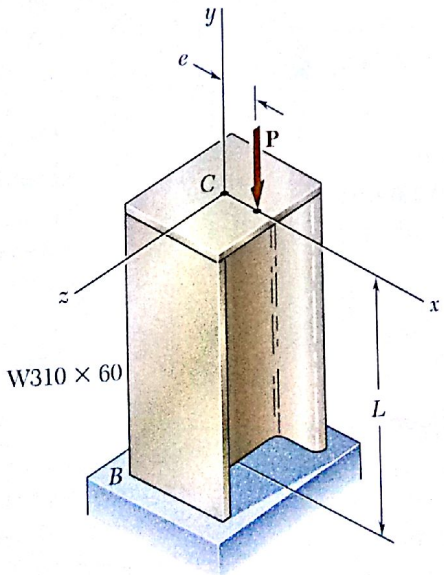


Figura P10.39

10.40 Retome el problema 10.39, y ahora suponga que el valor de L es 4.5 m.

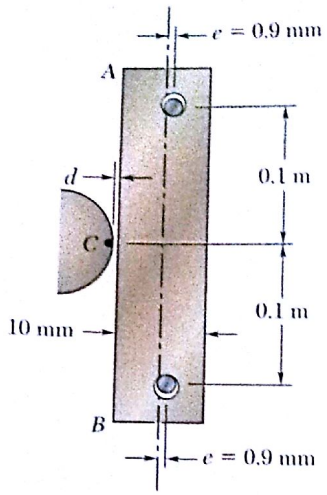


Figura P10.41

10.41 La barra de acero AB tiene una sección transversal cuadrada de 10 × 10 mm y la sostienen anclajes fijos con la misma separación entre sí y ubicados a una distancia $e = 0.9$ mm del eje geométrico de la barra. Si se sabe que a la temperatura T_0 los anclajes están en contacto con la barra y que la fuerza en ésta es de cero, determine el incremento de temperatura para el cual la barra entrará en contacto con el punto C si $d = 0.3$ mm. Utilice $E = 200$ GPa y un coeficiente de expansión térmica $\alpha = 11.7 \times 10^{-6}$/°C.

10.42 Para la barra del problema 10.41 determine la distancia d que se requiere para que la barra entre en contacto con el punto C cuando la temperatura se incrementa en 60°C.

10.43 Un tubo que tiene la sección transversal mostrada en la figura, se utiliza como una columna de 10 ft. Para el grado de acero usado $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi. Si se requiere un factor de seguridad de 2.8 respecto de la deformación permanente, calcule la carga **P** permisible cuando la excentricidad e es *a*) 0.6 in., *b*) 0.3 in. (*Sugerencia:* Como el factor de seguridad debe aplicarse a la carga **P**, no al esfuerzo, utilice la figura 10.24 para determinar P_Y.)

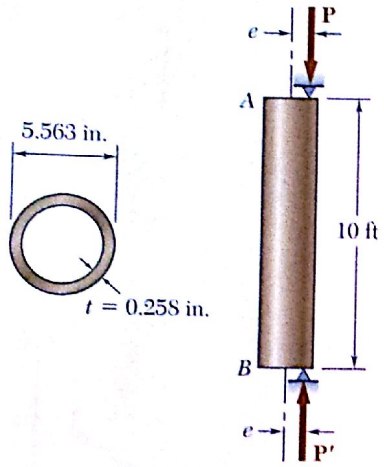


Figura P10.43

10.44 Retome el problema 10.43, y ahora suponga que la longitud de la columna se incrementa a 14 ft.

10.45 Se aplica una carga axial **P** a la columna BC de acero laminado con perfil W250 × 44.8 la cual está libre en su parte superior C y fija en su base B. Si se sabe que la excentricidad de la carga es $e = 12$ mm, y que para el grado de acero usado $\sigma_Y = 250$ MPa y que $E = 200$ GPa, determine *a*) la magnitud P de la carga permisible si se necesita un factor de seguridad de 2.4 respecto de la deformación permanente, *b*) la relación de la carga encontrada en el inciso *a*) con la magnitud de la carga céntrica permisible para la columna. (Vea la sugerencia del problema 10.43.)

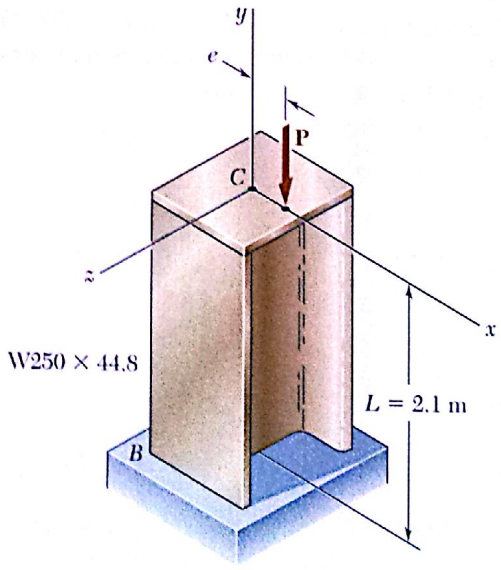


Figura P10.45

10.46 Retome el problema 10.45, y ahora suponga que la longitud de la columna se reduce a 1.6 m.

10.47 Se aplica una carga axial **P** de 100 kN a una columna *BC* de acero laminado con perfil W150 × 18 con su extremo superior *C* libre y su base *B* fija. Si se sabe que la excentricidad de la carga es $e = 6$ mm, determine la longitud *L* máxima permisible si el esfuerzo admisible en la columna es de 80 MPa. Utilice $E = 200$ GPa.

10.48 Se aplica una carga axial **P** de 55 kip a una columna *BC* de acero laminado con perfil W8 × 24 libre en su extremo superior *C* y fija en su base *B*. Si se sabe que la excentricidad de la carga es $e = 0.25$ in., determine la longitud *L* máxima permisible si el esfuerzo permitido en la columna es de 14 ksi. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

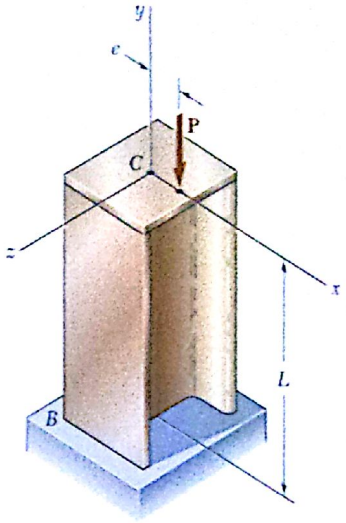


Figura P10.47 y P10.48

10.49 Se aplican cargas axiales de magnitud $P = 135$ kip paralelas al eje geométrico de una columna *AB* de acero laminado con perfil W10 × 54 y que intersecan al eje *x* a una distancia *e* de su eje geométrico. Si se sabe que $\sigma_{perm} = 12$ ksi y que $E = 29 \times 10^6$ psi, determine la máxima longitud permisible *L* cuando *a*) $e = 0.25$ in., *b*) $e = 0.5$ in.

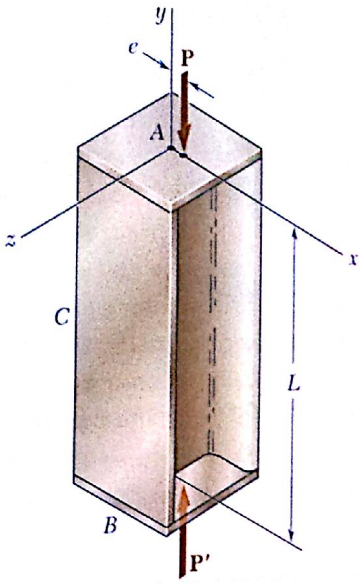


Figura *P10.49* y P10.50

10.50 Se aplican cargas axiales de magnitud $P = 580$ kN paralelas al eje geométrico de una columna *AB* de acero laminado con perfil W250 × 80 y que intersecan al eje *x* a una distancia *e* de su eje geométrico. Si se sabe que $\sigma_{perm} = 75$ MPa y que $E = 200$ GPa, determine la máxima longitud permisible *L* cuando *a*) $e = 5$ mm, *b*) $e = 10$ mm.

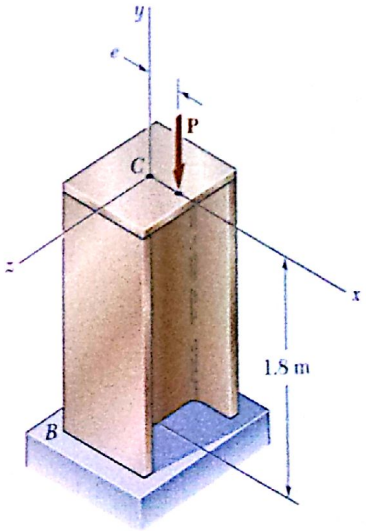


Figura P10.51

10.51 Se aplica una carga axial de magnitud $P = 220$ kN en un punto ubicado sobre el eje *x* a una distancia $e = 6$ mm del eje geométrico de la columna *BC* de patín ancho. Si se sabe que $E = 200$ GPa, elija el perfil W200 más ligero que puede usarse si $\sigma_{perm} = 120$ MPa.

10.52 Retome el problema 10.51, y ahora suponga que la magnitud de la carga axial es $P = 345$ kN.

10.53 Se aplica una carga axial de 12 kip con una excentricidad $e = 0.375$ in. a la barra circular de acero *BC* que tiene libre su extremo *C* y está fija en su base *B*. Si se sabe que las barras del lote disponible para usarse tienen diámetros en incrementos de $\frac{1}{8}$ in. desde 1.5 in. hasta 3.0 in., determine la barra más ligera que podría emplearse si $\sigma_{perm} = 15$ ksi. Use $E = 29 \times 10^6$ psi.

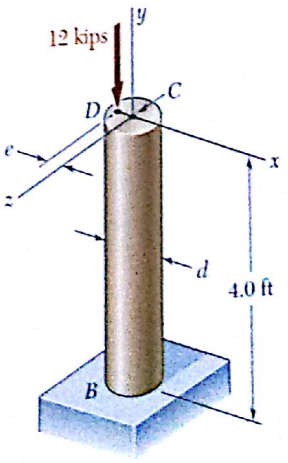


Figura P10.53

10.54 Retome el problema 10.53, y ahora suponga que la carga axial de 12 kip se aplicará a la barra con una excentricidad $e = \frac{1}{2}d$.

10.55 Se aplican cargas de magnitud $P = 175$ kN paralelas al eje geométrico de una columna AB de acero laminado con perfil W250 × 44.8 y que intersecan al eje x a una distancia $e = 12$ mm de su eje geométrico. Si se sabe que $\sigma_Y = 250$ MPa y que $E = 200$ GPa, determine el factor de seguridad que debe aplicarse respecto de la cedencia. (*Sugerencia*: Como el factor de seguridad debe aplicarse a la carga **P**, no al esfuerzo, utilice la figura 10.24 para determinar P_Y.)

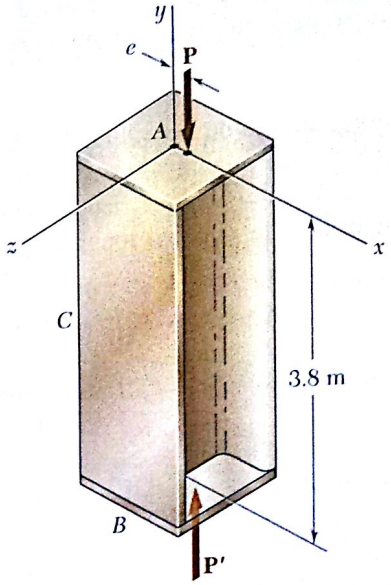


Figura *P10.55*

10.56 Retome el problema 10.55, y ahora suponga que $e = 16$ mm y $P = 155$ kN.

10.6 DISEÑO DE COLUMNAS BAJO UNA CARGA CÉNTRICA

En las secciones anteriores, la carga crítica de una columna se determinó mediante la fórmula de Euler, y se investigaron las deformaciones y los esfuerzos en las columnas cargadas excéntricamente usando la fórmula de la secante. En cada caso, se supuso que todos los esfuerzos permanecían debajo del límite de proporcionalidad y que la columna era inicialmente un prisma recto homogéneo. Las columnas reales no se ajustan a esa idealización, por lo que, en la práctica, el diseño de columnas se basa en ecuaciones empíricas que reflejan los resultados de numerosas pruebas de laboratorio.

Durante el último siglo, muchas columnas de acero han sido probadas aplicándoles una carga axial céntrica e incrementando la carga hasta producir la falla. Los resultados de tales pruebas se presentan en la figura 10.25 donde, para cada una de muchas pruebas, se ha marcado un punto con la ordenada igual al esfuerzo normal σ_{cr} de falla y su abscisa igual al valor correspondiente de la relación efectiva de esbeltez L_e/r. Aunque hay considerable dispersión en los resultados, se observan regiones correspondientes a tres tipos de falla. Para columnas largas, donde L_e/r es grande, la falla se puede predecir con exactitud mediante la fórmula de Euler, y el valor de σ_{cr} depende del módulo de elasticidad E del acero utilizado, pero no del límite de cedencia σ_Y. Para columnas muy cortas y bloques a compresión, la falla ocurre

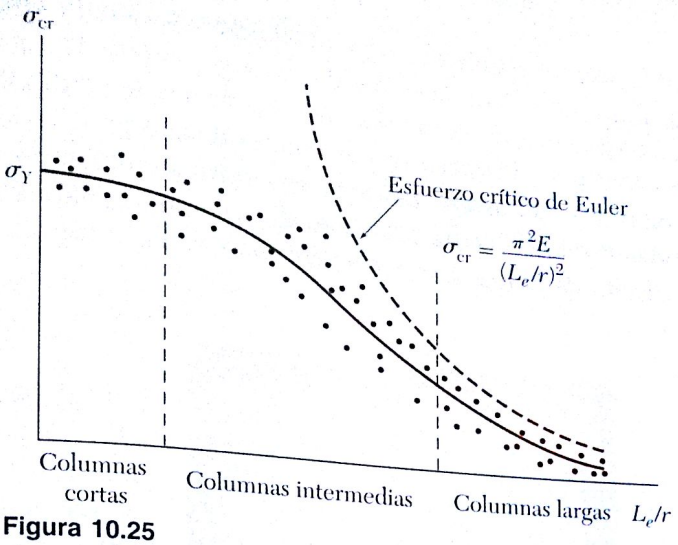


Figura 10.25

esencialmente como un resultado de la cedencia, y tenemos $\sigma_{cr} \approx \sigma_Y$. Las columnas de longitud intermedia comprenden los casos en donde la falla depende de σ_Y y E. En este rango, la falla de la columna es un fenómeno complejo y se han usado datos de laboratorio para guiar el desarrollo de ecuaciones de diseño y especificaciones.

Las ecuaciones empíricas que expresan esfuerzos permisibles o esfuerzos críticos en función de la relación efectiva de esbeltez se introdujeron hace más de un siglo y han experimentado un proceso continuo de refinamiento y mejora. Algunas ecuaciones empíricas típicas, utilizadas para aproximar datos de laboratorio, se muestran en la figura 10.26. Como una sola ecuación no es adecuada para todos los valores de L_e/r, se han desarrollado ecuaciones diferentes, cada una con un rango de aplicabilidad, para los diversos ma-

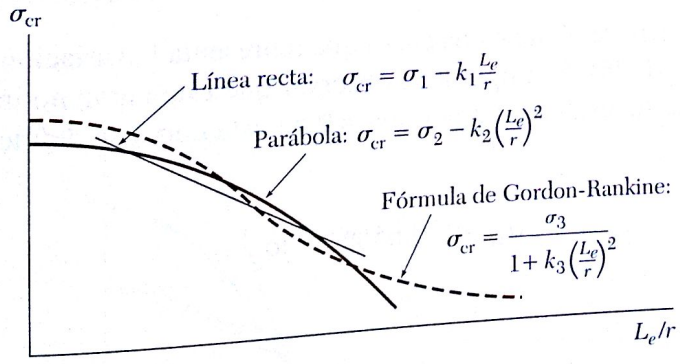
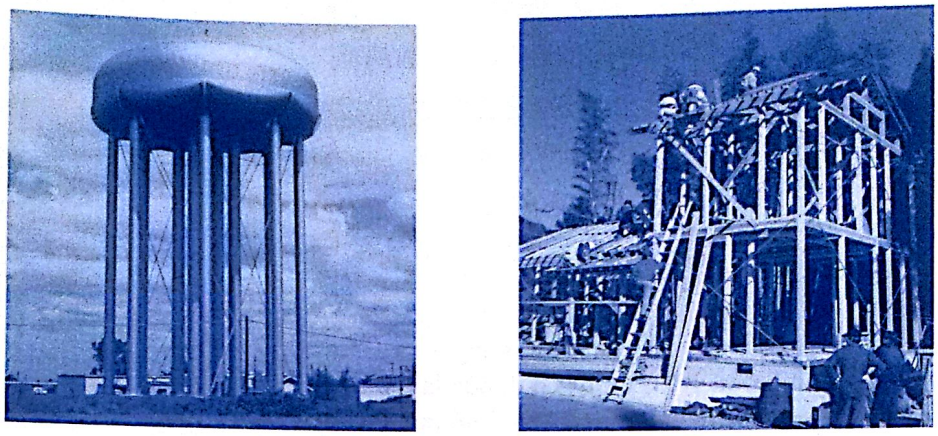


Figura 10.26

teriales. En cada caso debe verificarse que la ecuación que va a usarse es aplicable para el valor de L_e/r de la columna seleccionada. Además, debe determinarse si la ecuación proporciona el valor del esfuerzo crítico para la columna, en cuyo caso este valor debe dividirse entre el factor de seguridad apropiado, o si da directamente el esfuerzo permisible.

A continuación se estudiarán fórmulas específicas para diseñar columnas de acero, aluminio y madera sometidas a cargas céntricas. La figura 10.27 ilustra algunos ejemplos de columnas que seguramente se diseñaron con el uso de dichas fórmulas. Primero se presenta el diseño para los tres distintos materiales con el uso del *diseño del esfuerzo permisible*. Después se presentan las fórmulas necesarias para el diseño de columnas de acero, basadas en el *factor de diseño de carga y resistencia*.†



a) *b)*

Figura 10.27 El tanque de agua *a)* se apoya en columnas de acero, y el edificio en construcción *b)* se estructura con columnas de madera.

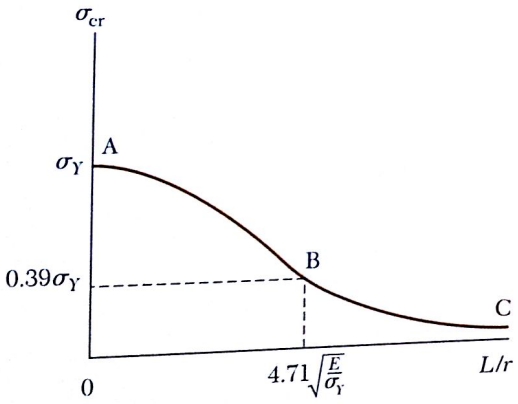


Figura 10.28

Acero estructural. Diseño del esfuerzo permitido. Las ecuaciones más usadas para el diseño de columnas de acero bajo carga céntrica se encuentran en las especificaciones para las construcciones con acero estructural del American Institute of Steel Construction.‡ Como se verá, una expresión exponencial se usa para predecir σ_{perm} en las columnas de longitudes cortas e intermedias, y una relación de tipo Euler se utiliza para columnas largas. Estas relaciones se desarrollan en dos pasos:

1. Primero se obtiene una curva que representa la variación de σ_{cr} frente a L/r (figura 10.28). Es importante observar que esta curva no incorpora ningún factor de seguridad.§ La porción AB de esta curva se define mediante la ecuación

$$\sigma_{cr} = [0.658^{(\sigma_Y/\sigma_e)}]\sigma_Y \tag{10.38}$$

donde

$$\sigma_e = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \tag{10.39}$$

† En fórmulas de diseño específicas, la letra L siempre se refiere a la longitud efectiva de la columna

‡ *Manual of Steel Construction*, 13a. ed., American of Steel Construction, Chicago, 2005.

§ En la especificación para construcciones con acero estructural, el símbolo F se utiliza para los esfuerzos.

La porción BC se define mediante la ecuación

$$\sigma_{cr} = 0.877\sigma_e \tag{10.40}$$

Se observa que cuando $L/r = 0$, $\sigma_{cr} = \sigma_Y$ en la ecuación (10.38). En el punto B la ecuación (10.38) se une a la ecuación (10.40). El valor de la esbeltez L/r en la unión entre las dos ecuaciones es

$$\frac{L}{r} = 4.71\sqrt{\frac{E}{\sigma_Y}} \tag{10.41}$$

Si L/r es menor que el valor en la ecuación (10.41), σ_{cr} se determina a partir de la ecuación (10.38), y si L/r es mayor, σ_{cr} se determina a partir de la ecuación (10.40). Con el valor de esbeltez L/r especificado en la ecuación (10.41), el esfuerzo $\sigma_e = 0.44\ \sigma_Y$. Si se utiliza la ecuación (10.40), $\sigma_{cr} = 0.877\ (0.44\ \sigma_Y) = 0.39\ \sigma_Y$.

2. Se debe introducir un factor de seguridad para obtener las ecuaciones finales de diseño de la AISC. El factor de seguridad indicado por la especificación es 1.67. Por lo tanto

$$\sigma_{perm} = \frac{\sigma_{cr}}{1.67} \tag{10.42}$$

Las fórmulas obtenidas pueden emplearse con unidades SI o con unidades de uso común en Estados Unidos.

Observe que, mediante las ecuaciones (10.38), (10.40), (10.41) y (10.42), pueden calcularse los esfuerzos axiales permisibles para un grado dado de acero y cualquier valor dado permisible de L/r. El procedimiento consiste en calcular primero L/r en la intersección entre las dos ecuaciones a partir de la ecuación (10.41). Para valores dados de L/r menores que el de la ecuación (10.41), se usan las ecuaciones (10.38) y (10.42) para calcular σ_{perm}, y para valores mayores que el de la ecuación (10.41), se utilizan las ecuaciones (10.40) y (10.42) para calcular σ_{perm}. En la figura 10.29 se proporciona una ilustración general de cómo varía σ_e en función de L/r para diferentes grados de acero estructural.

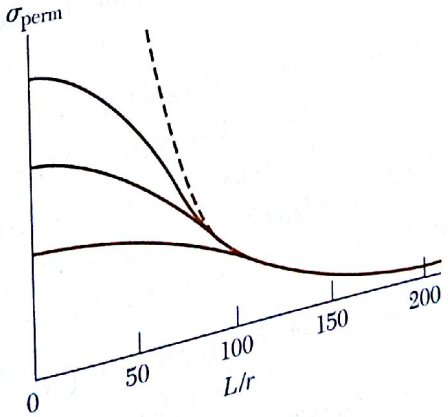


Figura 10.29

EJEMPLO 10.02

Determine la mayor longitud L no apoyada para la cual un elemento AB a compresión S100 × 11.5 puede soportar en forma segura la carga céntrica mostrada (figura 10.30). Considere σ_Y = 250 MPa y E = 200 GPa.

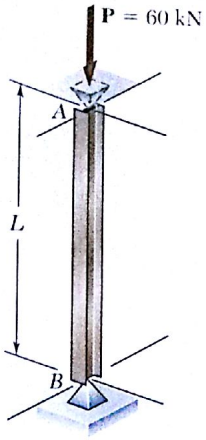


Figura 10.30

Del apéndice C se encuentra que para S100 × 11.5:

$$A = 1\,460\ \text{mm}^2 \qquad r_x = 41.6\ \text{mm} \qquad r_y = 14.8\ \text{mm}$$

Si la carga de 60 kN ha de ser soportada en forma segura, debe tenerse

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{P}{A} = \frac{60 \times 10^3\,\text{N}}{1\,460 \times 10^{-6}\,\text{m}^2} = 41.1 \times 10^6\ \text{Pa}$$

Se debe calcular el esfuerzo crítico σ_{cr}. Si se supone que L/r es mayor que la esbeltez especificada por la ecuación (10.41), se utiliza la ecuación (10.40) con la ecuación (10.39) y se escribe

$$\sigma_{cr} = 0.877\,\sigma_e = 0.877\,\frac{\pi^2 E}{(L/r)^2}$$

$$= 0.877\,\frac{\pi^2(200 \times 10^9\ \text{Pa})}{(L/r)^2} = \frac{1.731 \times 10^{12}\ \text{Pa}}{(L/r)^2}$$

Si se utiliza la expresión de la ecuación (10.42) para σ_{perm}, es posible escribir

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{\sigma_{cr}}{1.67} = \frac{1.037 \times 10^{12}\ \text{Pa}}{(L/r)^2}$$

Al igualar esta expresión con el valor requerido de σ_{perm}, se tiene

$$\frac{1.037 \times 10^{12}\ \text{Pa}}{(L/r)^2} = 41.1 \times 10^6\ \text{Pa} \qquad L/r = 158.8$$

La relación de esbeltez a partir de la ecuación (10.41) es

$$\frac{L}{r} = 4.71\sqrt{\frac{200 \times 10^9}{250 \times 10^6}} = 133.2$$

El supuesto de que L/r es mayor que esta relación de esbeltez era correcto. Así, al elegir el menor de los dos radios de giro se tiene

$$\frac{L}{r_y} = \frac{L}{14.8 \times 10^{-3}\,\text{m}} = 158.8 \qquad L = 2.35\ \text{m}$$

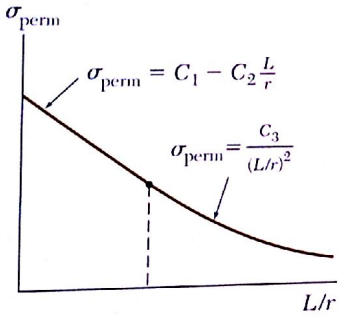


Figura 10.31

Aluminio. Hay muchas aleaciones de aluminio disponibles para usarse en la construcción estructural y de máquinas. Para la mayoría de columnas las especificaciones de la Aluminum Association† proporcionan tres ecuaciones para el esfuerzo permisible en las columnas bajo carga céntrica. En la figura 10.31 se muestra la variación de σ_{perm} con L/r definida por estas ecuaciones. Para las columnas cortas se usa una relación lineal entre σ_{perm} y L/r, y para columnas largas se utiliza una ecuación del tipo de Euler. Abajo se dan las ecuaciones específicas para el uso en edificios y estructuras similares en unidades SI y americanas para las aleaciones comúnmente utilizadas.

Aleación 6061-T6:

$$L/r < 66: \qquad \sigma_{\text{perm}} = [20.2 - 0.126(L/r)]\ \text{ksi} \tag{10.43}$$

$$= [139 - 0.868(L/r)]\ \text{MPa} \tag{10.43'}$$

$$L/r \geq 66: \qquad \sigma_{\text{perm}} = \frac{51\,000\ \text{ksi}}{(L/r)^2} = \frac{351 \times 10^3\ \text{MPa}}{(L/r)^2} \tag{10.44}$$

Aleación 2014-T6:

$$L/r < 55: \qquad \sigma_{\text{perm}} = [30.7 - 0.23(L/r)]\ \text{ksi} \tag{10.45}$$

$$= [212 - 1.585(L/r)]\ \text{MPa} \tag{10.45'}$$

$$L/r \geq 55: \qquad \sigma_{\text{perm}} = \frac{54\,000\ \text{ksi}}{(L/r)^2} = \frac{372 \times 10^3\ \text{MPa}}{(L/r)^2} \tag{10.46}$$

† *Specifications and Guidelines for Aluminum Structures*, Aluminum Association, Inc., Washington D.C., 2005.

Madera. Para el diseño de columnas de madera, las especificaciones de la American Forest and Paper Association† proporcionan una sola ecuación para obtener el esfuerzo permisible en columnas cortas, intermedias y largas bajo carga céntrica. Para una columna con sección transversal *rectangular* de lados b y d, donde $d < b$, la variación de σ_{perm} con L/d se muestra en la figura 10.32.

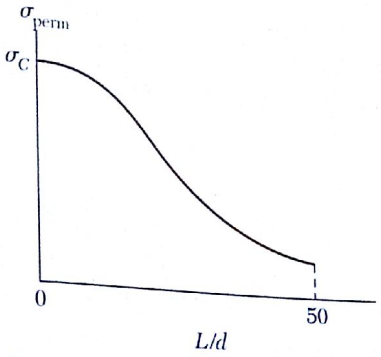


Figura 10.32

Para columnas sólidas fabricadas con una sola pieza de madera o con láminas aglutinadas, el esfuerzo permisible σ_{perm} es

$$\sigma_{\text{perm}} = \sigma_C C_P \tag{10.47}$$

en donde σ_C es el esfuerzo ajustado admisible para la compresión paralela a la fibra.‡ Los ajustes realizados para obtener σ_C se incluyen en las especificaciones para dar cuenta de las diferentes variaciones, tales como la duración de la carga. El factor de estabilidad de la columna C_P interviene en la longitud de ésta y queda definido por la siguiente ecuación:

$$C_P = \frac{1 + (\sigma_{CE}/\sigma_C)}{2c} - \sqrt{\left[\frac{1 + (\sigma_{CE}/\sigma_C)}{2c}\right]^2 - \frac{\sigma_{CE}/\sigma_C}{c}} \tag{10.48}$$

El parámetro c tiene que ver con el tipo de columna, y es igual a 0.8 para postes de madera y 0.90 para columnas de láminas de madera aglutinada. El valor de σ_{CE} se define por

$$\sigma_{CE} = \frac{0.822E}{(L/d)^2} \tag{10.49}$$

Donde E es un módulo de elasticidad ajustado para el pandeo de columnas. Las columnas en las que L/d excede 50 no las permite el *National Design for Wood Construction*.

† *National Design Specification for Wood Construction*, American Forest and Paper Association, American Wood Council, Washington, D.C., 2005.

‡ En el *National Design Specification for Wood Construction*, el símbolo F se utiliza para denotar los esfuerzos.

EJEMPLO 10.03

Si la longitud efectiva de la columna AB (figura 10.33) es 14 ft y debe soportar en forma segura una carga de 32 kips, diséñela usando una sección cuadrada laminada pegada. El módulo de elasticidad ajustado de la madera es $E = 800 \times 10^3$ psi y el esfuerzo permisible ajustado y para compresión paralela a la fibra es $\sigma_C = 1\,060$ psi.

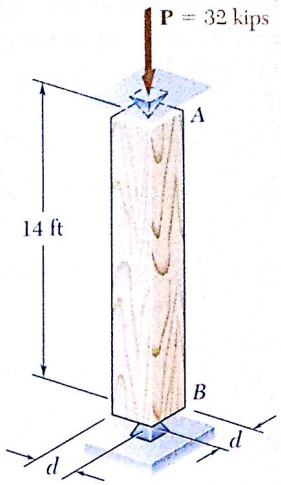


Figura 10.33

Se observa que $c = 0.90$ para columnas de madera laminar aglutinada. Se debe calcular el valor de σ_{CE}. Con la ecuación (10.49) queda

$$\sigma_{CE} = \frac{0.822E}{(L/d)^2} = \frac{0.822(800 \times 10^3 \text{ psi})}{(168 \text{ in.}/d)^2} = 23.299d^2 \text{ psi}$$

Luego se emplea la ecuación (10.48) para expresar el factor de estabilidad de la columna en términos de d, con $(\sigma_{CE}/\sigma_C) = (23.299d^2/1.060 \times 10^3) = 21.98 \times 10^{-3}\, d^2$,

$$C_P = \frac{1 + (\sigma_{CE}/\sigma_C)}{2c} - \sqrt{\left[\frac{1 + (\sigma_{CE}/\sigma_C)}{2c}\right]^2 - \frac{\sigma_{CE}/\sigma_C}{c}}$$

$$= \frac{1 + 21.98 \times 10^{-3} d^2}{2(0.90)} - \sqrt{\left[\frac{1 + 21.98 \times 10^{-3} d^2}{2(0.90)}\right]^2 - \frac{21.98 \times 10^{-3} d^2}{0.90}}$$

Como la columna debe cargar 32 kips, lo que es igual a $\sigma_C d^2$, se usa la ecuación (10.47) y resulta

$$\sigma_{\text{perm}} = \frac{32 \text{ kips}}{d^2} = \sigma_C C_P = 1.060 C_P$$

Al resolver esta ecuación para C_P y sustituir el valor que se obtiene en la ecuación previa, queda

$$\frac{30.19}{d^2} = \frac{1 + 21.98 \times 10^{-3} d^2}{2(0.90)} - \sqrt{\left[\frac{1 + 21.98 \times 10^{-3} d^2}{2(0.90)}\right]^2 - \frac{21.98 \times 10^{-3} d^2}{0.90}}$$

Resolviendo para d por ensayo y error queda $d = 6.45$ in.

***Acero estructural: Factor de diseño de carga y resistencia.** Como se vio en la sección 1.13, un método alternativo de diseño se basa en la determinación de la carga en la que la estructura deja de ser útil. El diseño se basa en la desigualdad dada por la ecuación (1.26):

$$\gamma_D P_D + \gamma_L P_L \leq \phi P_U \tag{1.26}$$

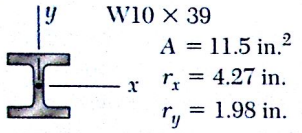
El enfoque usado para el diseño de columnas de acero sometidas a una carga céntrica, tal como se presenta en el documento *Load and Resistance Factor Design* con la especificación AISC es similar al que se describe en Allowable Stress Design. Si se utiliza el esfuerzo crítico σ_{cr}, la carga última P_U se define como

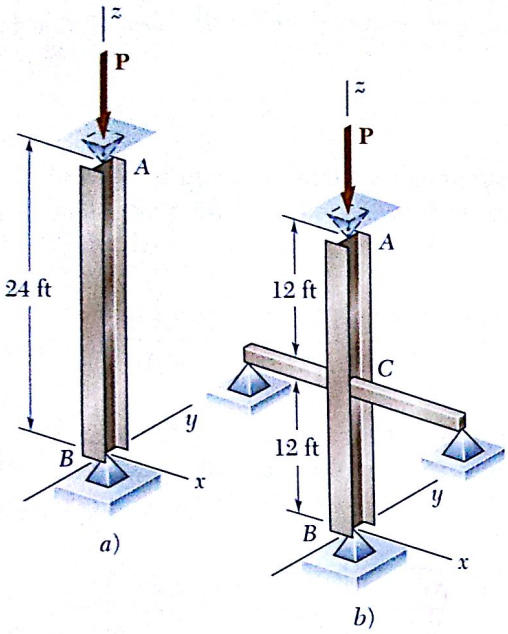
$$P_U = \sigma_{cr} A \tag{10.50}$$

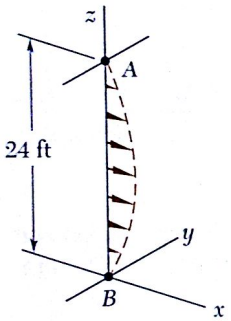
La determinación del esfuerzo crítico σ_{cr} sigue el mismo enfoque usado para el diseño del esfuerzo permisible. Esto requiere utilizar la ecuación (10.41) para determinar la esbeltez en la unión entre las ecuaciones (10.38) y (10.40). Si la esbeltez L/r especificada es menor que el valor de la ecuación (10.41), se utiliza la ecuación (1.38), y si es mayor, se emplea la ecuación (10.40). las ecuaciones se pueden utilizar con unidades SI o con las de uso común en Estados Unidos.

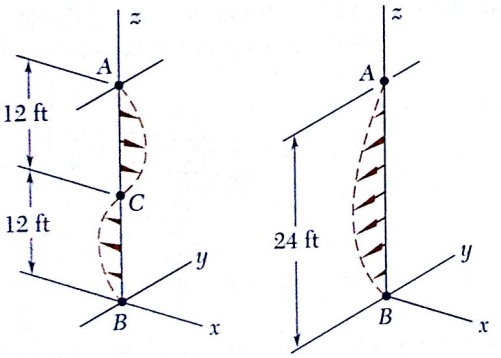
Se observa que mediante la ecuación (10.50) con la ecuación (1.26), es posible determinar si el diseño es aceptable. El procedimiento consiste, primero, en determinar la relación de esbeltez a partir de la ecuación (10.41). Para valores de L/r menores que esta esbeltez, la *carga última* P_U para usar en la ecuación (1.26) se obtiene de la ecuación (10.50), usando σ_{cr} determinado a partir de la ecuación (10.38). Para valores de L/r mayores que esta esbeltez, la *carga última* P_U se obtiene de la ecuación (10.50) con la ecuación (10.40). Las especificaciones de los factores de diseño para carga y resistencia del American Institute of Steel Construction especifican que el *factor de resistencia* ϕ es 0.90.

Nota: Las fórmulas de diseño que se presentaron en esta sección se pensaron para proporcionar ejemplos de diferentes enfoques de diseño. Estas fórmulas no ofrecen todos los requerimientos que se necesitan para muchos diseños, y el estudiante debe remitirse a las especificaciones apropiadas de diseño antes de intentar hacer diseños reales.









PROBLEMA MODELO 10.3

La columna AB es un perfil W10 × 39 de acero laminado con $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi. Determine la carga céntrica permisible **P**: *a*) si la longitud efectiva de la columna en cualquier dirección es 24 ft, *b*) si se proporciona apoyo lateral para evitar el movimiento del punto medio C en el plano medio xz. (Suponga que el movimiento de C en el plano yz no se afecta por el apoyo lateral.)

SOLUCIÓN

Se calcula primero el valor de C_c correspondiente al límite de fluencia $\sigma_Y = 36$ ksi.

$$\frac{L}{r} = 4.71\sqrt{\frac{29 \times 10^6}{36 \times 10^3}} = 133.7$$

***a*) Longitud efectiva = 24 ft.** Como $r_y < r_x$, el pandeo tendrá lugar en el plano xz. Para $L = 24$ ft y $r = r_y = 1.98$ in., la relación de esbeltez es

$$\frac{L}{r_y} = \frac{(24 \times 12)\text{ in.}}{1.98\text{ in.}} = \frac{288\text{ in.}}{1.98\text{ in.}} = 145.5$$

Como $L/r > 133.7$, se utiliza la ecuación (10.39) en la ecuación (10.40) para determinar σ_{cr}

$$\sigma_{cr} = 0.877\,\sigma_e = 0.877\frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} = 0.877\frac{\pi^2(29 \times 10^3\text{ ksi})}{(145.5)^2} = 11.86\text{ ksi}$$

El esfuerzo permisible, calculado a partir de la ecuación (10.42) y P_{perm} es

$$\sigma_{perm} = \frac{\sigma_{cr}}{1.67} = \frac{11.86\text{ ksi}}{1.67} = 7.10\text{ ksi}$$

$$P_{perm} = \sigma_{perm}A = (7.10\text{ ksi})(11.5\text{ in}^2) = 81.7\text{ kips}$$

***b*) Refuerzo lateral en el punto medio *C*.** Como el apoyo lateral evita el movimiento de C en el plano xz, pero no en el plano yz, debe calcularse la relación de esbeltez correspondiente al pandeo en cada plano y determinarse cuál es la mayor.

Plano xz: Longitud efectiva = 12 ft = 144 in., $r = r_y = 1.98$ in.

$$L/r = (144\text{ in.})/(1.98\text{ in.}) = 72.7$$

Plano yz: Longitud efectiva = 24 ft = 288 in., $r = r_x = 4.27$ in.

$$L/r = (288\text{ in.})/(4.27\text{ in.}) = 67.4$$

Como la mayor relación de esbeltez corresponde a una carga permisible menor, se elige $L/r = 72.7$. Puesto que es menor que $L/r = 145.5$, se utilizan las ecuaciones (10.39) y (10.38) para determinar σ_{cr}

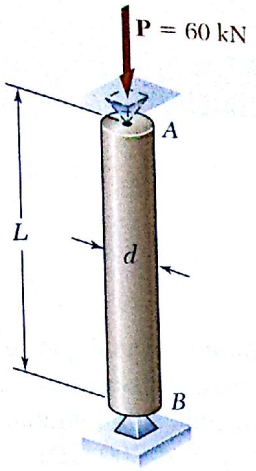
$$\sigma_e = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} = \frac{\pi^2(29 \times 10^3\text{ ksi})}{(72.7)^2} = 54.1\text{ ksi}$$

$$\sigma_{cr} = [0.658^{(\sigma_Y/\sigma_e)}]\,F_Y = [0.658^{(36\text{ ksi}/54.1\text{ ksi})}]\,36\text{ ksi} = 27.3\text{ ksi}$$

Ahora se calcula el esfuerzo permisible mediante la ecuación (10.42) y la carga permisible

$$\sigma_{perm} = \frac{\sigma_{cr}}{1.67} = \frac{27.3\text{ ksi}}{1.67} = 16.32\text{ ksi}$$

$$P_{perm} = \sigma_{perm}A = (16.32\text{ ksi})(11.5\text{ in}^2) \qquad P_{perm} = 187.7\text{ ksi}$$



PROBLEMA MODELO 10.4

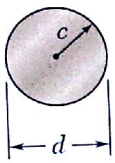
Usando la aleación de aluminio 2014-T6, determine la barra de menor diámetro que puede usarse para soportar la carga céntrica $P = 60$ kN si *a*) $L = 750$ mm, *b*) $L = 300$ mm.

SOLUCIÓN

Para la sección transversal de una barra circular, se tiene

$$I = \frac{\pi}{4}c^4 \qquad A = \pi c^2 \qquad r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{\pi c^4/4}{\pi c^2}} = \frac{c}{2}$$

***a*) Longitud de 750 mm.** Puesto que no se conoce el diámetro de la barra, debe suponerse un valor de L/r; se *supondrá* $L/r > 55$ y se usará la ecuación (10.46). Para la carga céntrica **P**, $\sigma = P/A$ y se escribe



$$\frac{P}{A} = \sigma_{\text{perm}} = \frac{372 \times 10^3 \text{ MPa}}{(L/r)^2}$$

$$\frac{60 \times 10^3 \text{ N}}{\pi c^2} = \frac{372 \times 10^9 \text{ Pa}}{\left(\dfrac{0.750 \text{ m}}{c/2}\right)^2}$$

$$c^4 = 115.5 \times 10^{-9} \text{ m}^4 \qquad c = 18.44 \text{ mm}$$

Para $c = 18.44$ mm la relación de esbeltez es:

$$\frac{L}{r} = \frac{L}{c/2} = \frac{750 \text{ mm}}{(18.44 \text{ mm})/2} = 81.3 > 55$$

La hipótesis es correcta y para $L = 750$ mm el diámetro requerido es

$$d = 2c = 2(18.44 \text{ mm}) \qquad d = 36.9 \text{ mm} \blacktriangleleft$$

***b*) Longitud de 300 mm.** De nuevo se *supone* $L/r > 55$. Usando la ecuación (10.46) y siguiendo el procedimiento de la parte *a*) se encuentra que, $c = 11.66$ mm y $L/r = 51.5$. Como $L/r < 55$ la suposición es incorrecta; debe suponerse ahora que $L/r < 55$ y utilizarse la ecuación (10.45′) para el diseño de esta barra.

$$\frac{P}{A} = \sigma_{\text{perm}} = \left[212 - 1.585\left(\frac{L}{r}\right)\right] \text{MPa}$$

$$\frac{60 \times 10^3 \text{ N}}{\pi c^2} = \left[212 - 1.585\left(\frac{0.3 \text{ m}}{c/2}\right)\right] 10^6 \text{ Pa}$$

$$c = 12.00 \text{ mm}$$

Para $c = 12.00$ mm la relación de esbeltez es:

$$\frac{L}{r} = \frac{L}{c/2} = \frac{300 \text{ mm}}{(12.00 \text{ mm})/2} = 50$$

La segunda hipótesis, que $L/r < 55$, es correcta. Para $L = 300$ mm, el diámetro requerido es

$$d = 2c = 2(12.00 \text{ mm}) \qquad d = 24.0 \text{ mm} \blacktriangleleft$$

PROBLEMAS

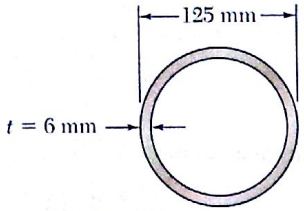


Figura P10.57

10.57 Una tubería de acero que tiene la sección transversal que se muestra en la figura, se usa como columna. Utilice las fórmulas para el diseño del esfuerzo permisible de AISC para encontrar la carga céntrica permisible si la longitud efectiva de la columna es *a*) 6 m, *b*) 4 m. Utilice $\sigma_Y = 250$ MPa y $E = 200$ GPa.

10.58 Una columna con la sección transversal que se muestra en la figura tiene una longitud efectiva de 13.5 ft. Utilice el diseño del esfuerzo permisible para calcular la máxima carga céntrica que puede aplicarse a la columna. Considere que $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi.

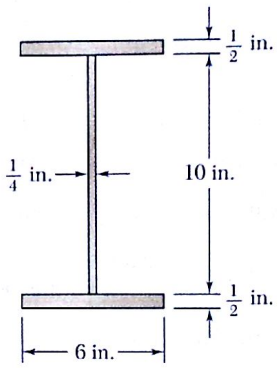


Figura P10.58

10.59 Con el uso del diseño del esfuerzo admisible, determine la carga céntrica permisible para una columna de 6 m de longitud efectiva que está hecha de los siguientes perfiles de acero laminado: *a*) W200 × 35.9, *b*) W200 × 86. Utilice $\sigma_Y = 250$ MPa y $E = 200$ GPa.

10.60 Se usa un perfil de acero laminado W8 × 31 para formar una columna de 21 ft de longitud efectiva. Con el empleo del diseño del esfuerzo permisible, determine la carga céntrica permisible si la resistencia a la fluencia del tipo de acero utilizado es *a*) $\sigma_Y = 36$ ksi, *b*) $\sigma_Y = 50$ ksi. Considere $E = 29 \times 10^6$ psi.

10.61 Una columna con una longitud efectiva de 3.5 m está hecha de madera con sección transversal de 114 × 140 mm. Si se sabe que para el grado de madera utilizada el esfuerzo ajustado permisible para la compresión paralela a la fibra es $\sigma_C = 7.6$ MPa y que el módulo ajustado $E = 2.8$ GPa, determine la carga céntrica máxima permisible para la columna.

10.62 Una columna de madera con sección transversal de 7.5 × 5.5 in. tiene una longitud efectiva de 18 ft. Si se sabe que para el tipo de madera usada el esfuerzo ajustado permisible para compresión paralela a la fibra es $\sigma_C = 1\,200$ psi y que el módulo ajustado $E = 470 \times 10^3$ psi, determine la carga céntrica máxima permisible para la columna.

10.63 La barra AB está libre en su extremo A y fija en su base B. Determine la carga céntrica **P** permisible si la aleación de aluminio empleada es una *a*) 6061-T6, *b*) 2014-T6.

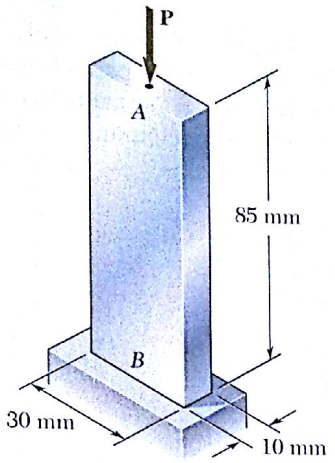


Figura P10.63

10.64 Un elemento a compresión tiene la sección transversal que se muestra en la figura y una longitud efectiva de 5 ft. Si se sabe que la aleación de aluminio usada es 6061-T6, determine la carga céntrica permisible.

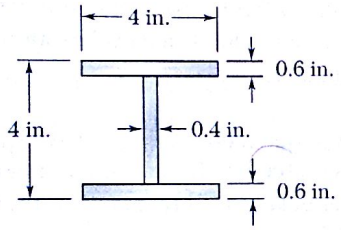


Figura P10.64

10.65 y *10.66* Un elemento a compresión de 9 m de longitud efectiva se obtiene al soldar dos placas de acero de 10 mm de grosor a un perfil de acero laminado W250 × 80, como se muestra en la figura. Si se sabe que $\sigma_Y = 345$ MPa y $E = 200$ GPa, utilice el diseño del esfuerzo permisible para determinar la carga céntrica permisible para el elemento a compresión.

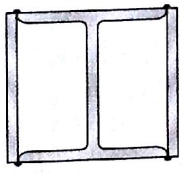


Figura P10.65

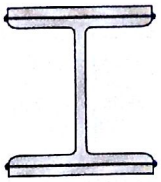


Figura *P10.66*

10.67 Al unir con pernos dos ángulos de acero de 127 × 76 × 12.7 mm se obtiene un elemento a compresión de 2.3 m de longitud efectiva como lo muestra la figura. Use el diseño de esfuerzo permisible y determine la carga céntrica permisible para la columna. Utilice $\sigma_Y = 250$ MPa y $E = 200$ GPa.

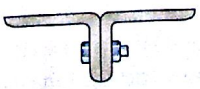


Figura *P10.67*

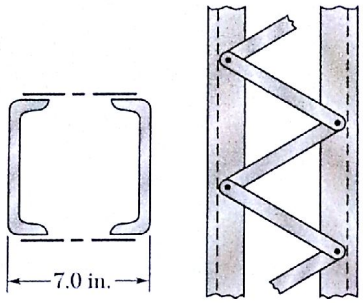


Figura P10.68

10.68 Una columna de 21 ft de longitud efectiva se obtiene al conectar dos canales de acero C10 × 20 con barras de enlace, como se muestra en la figura. Utilice el diseño de esfuerzo permisible para determinar la carga céntrica permisible para la columna. Emplee $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi.

10.69 Una columna rectangular con longitud efectiva de 4.4 m está hecha con madera laminar aglomerada. Si se sabe que para el tipo de madera empleada el esfuerzo ajustado permisible para compresión paralela a la fibra es $\sigma_C = 8.3$ MPa y que el módulo ajustado $E = 4.6$ GPa, determine la máxima carga céntrica permisible para la columna.

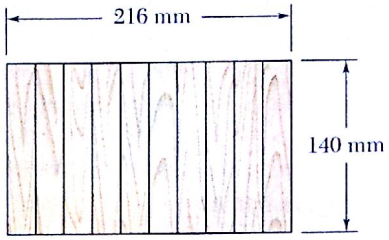


Figura P10.69

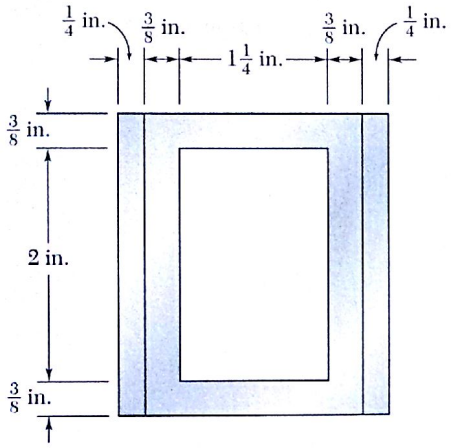


Figura P10.70

10.70 Un tubo estructural de aluminio se refuerza al remachar dos placas a su costado, como se observa en la figura, para usarlo como una columna de 5.6 ft de longitud efectiva. Si se sabe que todo el material es aluminio 2014-T6, determine la carga céntrica máxima permisible.

10.71 Se aplica una carga céntrica de 18 kips a una columna rectangular de madera con 22 ft de longitud efectiva. Si se usa una madera para la cual el esfuerzo permisible a compresión paralela a la fibra es $\sigma_C = 1\,050$ psi y se sabe que el módulo ajustado $E = 440 \times 10^3$ psi, determine la sección transversal cuadrada más pequeña que pueda utilizarse. Emplee $b = 2d$.

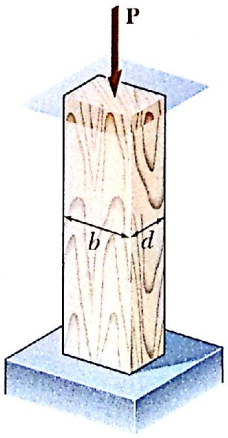


Figura P10.71

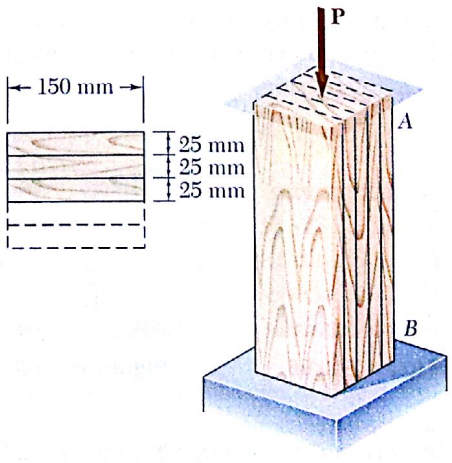


Figura *P10.72*

10.72 Se construye una columna de 2.1 m de longitud efectiva, pegando tablones de 25 × 150 mm de sección transversal. Si se sabe que el esfuerzo ajustado permisible a compresión paralela a la fibra es $\sigma_C = 7.7$ MPa y el módulo ajustado $E = 5.4$ GPa, determine el número de tablones que deben usarse para soportar la carga céntrica mostrada en la figura cuando *a*) $P = 52$ kN, *b*) $P = 108$ kN.

10.73 La columna laminar pegada que se muestra en la figura está libre en el extremo A y fija en su base B. Si se usa una madera con un esfuerzo permisible ajustado para la compresión paralela a la fibra de $\sigma_C = 9.2$ MPa y un módulo de elasticidad ajustado $E = 5.7$ GPa, determine la sección transversal mínima que puede soportar una carga céntrica de 62 kN.

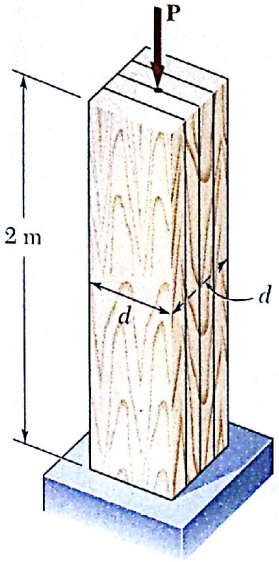


Figura P10.73

10.74 Una carga céntrica de 16 kip debe ser sostenida por una columna de aluminio, como se muestra en la figura. Si se utiliza la aleación de aluminio 6061-T6, determine la mínima dimensión b que puede utilizarse.

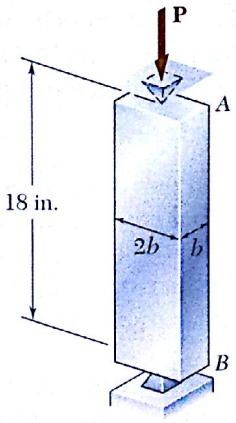


Figura P10.74

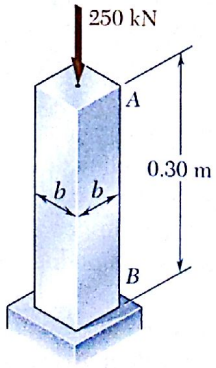


Figura P10.75

10.75 Se aplica una carga céntrica de 280 kN a la columna que se muestra en la figura, la cual está libre en su extremo A y fija en su base B. Si se usa aluminio 2014-T6, seleccione la sección transversal cuadrada más pequeña que puede emplearse.

10.76 Un tubo de aluminio de 90 mm de diámetro exterior debe sostener una carga céntrica de 120 kN. Si se sabe que los tubos del lote disponible están hechos de una aleación 2014-T6 y su espesor de pared aumenta en incrementos de 3 mm, desde 6 mm hasta 15 mm, determine el tubo más ligero que se puede emplear.

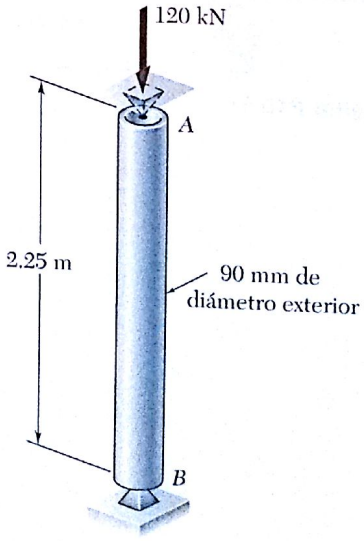


Figura *P10.76*

10.77 Una carga céntrica **P** debe ser sostenida por una barra de acero *AB*. Utilice el diseño del esfuerzo permisible para determinar la mínima dimensión d de la sección transversal que puede utilizarse cuando *a*) $P = 24$ kips, *b*) $P = 36$ kips. Utilice $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi.

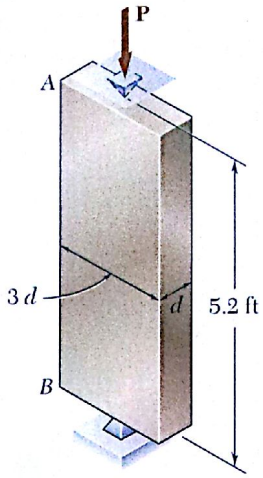


Figura *P10.77*

10.78 Una columna con longitud efectiva de 4.5 m debe sostener una carga céntrica de 900 kN. Si se sabe que $\sigma_Y = 345$ MPa y $E = 200$ GPa, utilice el diseño de esfuerzo permisible para seleccionar la profundidad nominal del perfil de patín ancho de 250 mm que debe usarse.

10.79 Una columna con longitud efectiva de 22.5 ft debe sostener una carga céntrica de 288 kips. Utilice el diseño de esfuerzo permisible para seleccionar la profundidad nominal del perfil de patín ancho de 14 in. que debe usarse. Considere que $\sigma_Y = 50$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi.

10.80 Una columna con longitud efectiva de 4.6 m debe sostener una carga céntrica de 525 kN. Si se sabe que $\sigma_Y = 345$ MPa y $E = 200$ GPa, utilice el diseño de esfuerzo permisible para seleccionar la profundidad nominal del perfil de patín ancho de 200 mm que debe usarse.

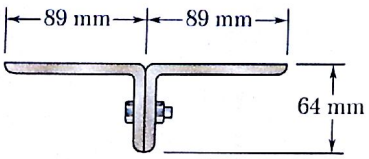


Figura P10.81

10.81 Se remachan dos ángulos de 89 × 64 mm como se muestra en la figura para usarse como una columna de 2.4 m de longitud efectiva para sostener una carga céntrica de 180 kN. Si se sabe que los ángulos disponibles tienen espesores de 6.4 mm, 9.5 mm y 12.7 mm, utilice el diseño del esfuerzo permisible para determinar los ángulos más ligeros que podrían usarse. Emplee $\sigma_Y = 250$ MPa y $E = 200$ GPa.

10.82 Se remachan dos ángulos de 89 × 64 mm como se muestra en la figura para usarse como una columna de 2.4 m de longitud efectiva para sostener una carga céntrica de 325 kN. Si se sabe que los ángulos disponibles tienen espesores de 6.4 mm, 9.5 mm y 12.7 mm, utilice el diseño del esfuerzo permisible para determinar los ángulos más ligeros que podrían usarse. Emplee $\sigma_Y = 250$ MPa y $E = 200$ GPa.

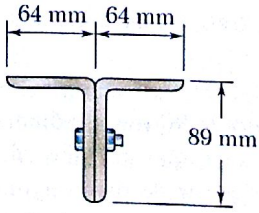


Figura P10.82

10.83 Un tubo estructural cuadrado que tiene la sección transversal que se muestra en la figura se utiliza como una columna de longitud efectiva de 26 ft para sostener una carga céntrica de 65 kips. Si los tubos disponibles tienen espesores de pared de $\frac{1}{4}$ in. hasta $\frac{3}{4}$ in. en incrementos de $\frac{1}{16}$ in., utilice el diseño del esfuerzo permisible para determinar el tubo más ligero que puede utilizarse. Considere $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi.

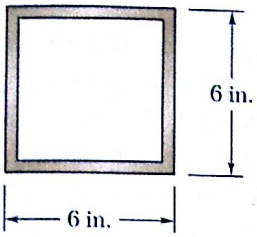


Figura *P10.83*

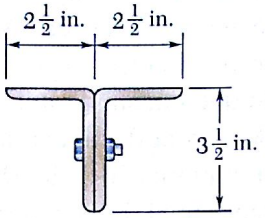


Figura P10.84

10.84 Se remachan dos ángulos de $3\frac{1}{2} \times 2\frac{1}{2}$ in., como se muestra en la figura, para usar como una columna de 6 ft de longitud efectiva para sostener una carga céntrica de 54 kips. Si se sabe que los ángulos disponibles tienen espesores de $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{8}$ y $\frac{1}{2}$ in., utilice el diseño del esfuerzo permisible para determinar los ángulos más ligeros que podrían usarse. Emplee $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi.

***10.85** Un tubo rectangular que tiene la sección transversal que se muestra en la figura, se utiliza como una columna de 14.5 ft de longitud efectiva. Si se sabe que $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi, utilice el diseño por el factor de carga y resistencia para determinar la mayor carga viva céntrica que puede aplicarse si la carga muerta céntrica es de 54 kips. Considere que el factor de carga muerta es $\gamma_D = 1.2$, el de carga viva es $\gamma_L = 1.6$ y el factor de resistencia es $\phi = 0.90$.

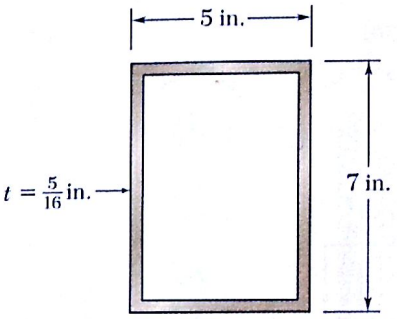


Figura P10.85

***10.86** Una columna con longitud efectiva de 5.8 m sostiene una carga céntrica, con una relación de cargas muertas y vivas igual a 1.35. El factor de carga muerta es $\gamma_D = 1.2$, el de carga viva es $\gamma_L = 1.6$, y el factor de resistencia $\phi = 0.90$. Use el diseño por factor de carga y resistencia para determinar las cargas vivas y muertas céntricas permisibles si la columna está elaborada de los siguientes perfiles de acero laminado *a*) W250 × 67, *b*) W360 × 101. Considere $\sigma_Y = 345$ MPa y $E = 200$ GPa.

***10.87** El tubo estructural con la sección transversal que se muestra en la figura se emplea como una columna de 15 ft de longitud efectiva para sostener una carga muerta céntrica de 51 kips y una carga viva céntrica de 58 kips. Si se sabe que los tubos disponibles están fabricados con espesores de pared que se incrementan en $\frac{1}{16}$ in. desde $\frac{3}{16}$ in. hasta $\frac{3}{8}$ in., utilice el diseño por factor de carga y resistencia para determinar el tubo más ligero que puede emplearse. Utilice $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi. El factor de carga muerta es $\gamma_D = 1.2$, el de carga viva $\gamma_L = 1.6$, y el factor de resistencia es $\phi = 0.90$.

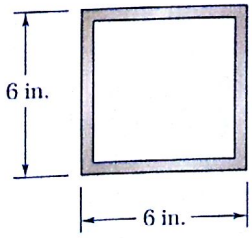


Figura P10.87

***10.88** Una columna de acero de 5.5 m de longitud efectiva debe sostener una carga muerta céntrica de 310 kN y una carga viva céntrica de 375 kN. Si se sabe que $\sigma_Y = 250$ MPa y $E = 200$ GPa, utilice el diseño por factor de carga y resistencia para seleccionar la profundidad nominal del perfil de patín ancho de 310 mm que debe emplearse. El factor de carga muerta es $\gamma_D = 1.2$, el de carga viva es $\gamma_L = 1.6$ y el factor de resistencia es $\phi = 0.90$.

10.7 DISEÑO DE COLUMNAS BAJO UNA CARGA EXCÉNTRICA

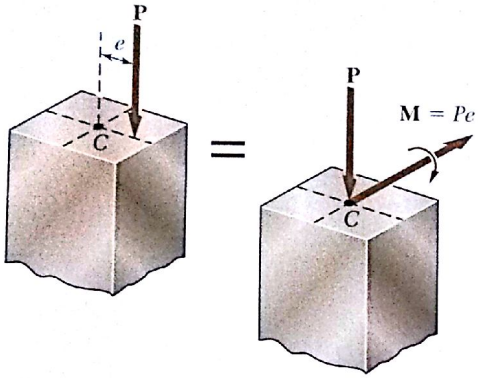


Figura 10.34

En esta sección se estudiará el diseño de columnas sometidas a cargas excéntricas. Se examinará cómo las ecuaciones empíricas de la sección previa pueden modificarse y usarse cuando la carga **P** aplicada a la columna tiene una excentricidad e conocida.

Primero recuerde, de la sección 4.12, que una carga excéntrica **P** aplicada en un plano de simetría de la columna puede reemplazarse por un sistema equivalente que consta de una carga céntrica **P** y un par **M** de momento $M = Pe$, donde e es la distancia de la línea de acción de la carga al eje longitudinal de la columna (figura 10.34). Los esfuerzos normales ejercidos en una sección transversal de la columna se obtienen superponiendo los esfuerzos debidos a la carga céntrica **P** y al par **M**, respectivamente (figura 10.35), siempre que la sección considerada no esté muy próxima a ninguno de los extremos de la columna y siempre que los esfuerzos incorporados no excedan el límite de proporcionalidad del material. Los esfuerzos normales debidos a la carga excéntrica **P** se expresan como:

$$\sigma = \sigma_{\text{céntrico}} + \sigma_{\text{flexión}} \tag{10.51}$$

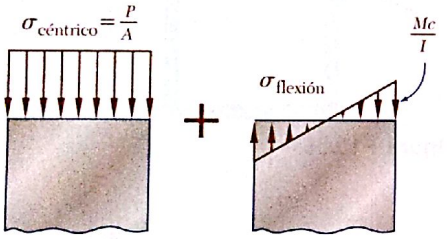


Figura 10.35

Recordando los resultados de la sección 4.12, se halla que el esfuerzo máximo de compresión en la columna es

$$\sigma_{\text{máx}} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \tag{10.52}$$

En una columna bien diseñada, el esfuerzo máximo definido por la ecuación (10.52) no debe exceder el esfuerzo permisible para la columna. Con el fin de satisfacer este requisito pueden utilizarse dos métodos alternos: el *método del esfuerzo permisible* y el *método de interacción*.

***a.* Método del esfuerzo permisible.** Este método se basa en la hipótesis de que los esfuerzos permisibles para una columna con carga excéntrica son iguales para la misma con carga céntrica. Debe tenerse, por tanto, $\sigma_{\text{máx}} \leq \sigma_{\text{perm}}$, donde σ_{perm} es el esfuerzo permisible bajo carga céntrica, o sustituyendo por $\sigma_{\text{máx}}$ de la ecuación (10.52)

$$\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \leq \sigma_{\text{perm}} \tag{10.53}$$

El esfuerzo permisible se obtiene mediante las ecuaciones de la sección 10.6 que, para un material dado, expresan a σ_{perm} como función de la relación de esbeltez de la columna. Los principales códigos de ingeniería requieren que se use la mayor relación de esbeltez para determinar el esfuerzo permisible, sin que interese que este valor corresponda o no al plano real de flexión. Este requisito a veces da como resultado un diseño en extremo conservador.

EJEMPLO 10.04

Una columna de sección transversal cuadrada de 2 in. y 28 in. de longitud efectiva está elaborada de aluminio 2014-T6. Usando el método del esfuerzo permisible, halle la máxima carga P que pueda soportar en forma segura con excentricidad de 0.8 in.

Primero se calcula el radio de giro r con los datos dados

$$A = (2 \text{ in.})^2 = 4 \text{ in.}^2 \qquad I = \tfrac{1}{12}(2 \text{ in.})^4 = 1.333 \text{ in.}^4$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{1.333 \text{ in.}^4}{4 \text{ in.}^2}} = 0.5773 \text{ in.}$$

Luego se calcula $L/r = (28 \text{ in.})/(0.5773 \text{ in.}) = 48.50$.

Como $L/r < 55$, se utiliza la ecuación (10.48) para encontrar el esfuerzo permisible en una columna de aluminio sometida a carga céntrica. Se tiene

$$\sigma_{\text{perm}} = [30.7 - 0.23(48.50)] = 19.55 \text{ ksi}$$

Ahora se recurre a la ecuación (10.53) con $M = Pe$ y $c = \frac{1}{2}(2 \text{ in.}) = 1 \text{ in.}$ para determinar la carga permisible:

$$\frac{P}{4 \text{ in.}^2} + \frac{P(0.8 \text{ in.})(1 \text{ in.})}{1.333 \text{ in.}^4} \le 19.55 \text{ ksi}$$

$$P \le 22.3 \text{ kips}$$

La carga máxima que puede aplicarse en forma segura es $P = 22.3$ kips.

b. Método de interacción. Recuerde que el esfuerzo permisible en una columna sometida a carga céntrica (figura 10.36*a*) es generalmente menor que el esfuerzo permisible en una columna sometida a flexión pura (figura 10.36*b*), ya que la primera toma en cuenta la posibilidad del pandeo. Por tanto, cuando se utiliza el método del esfuerzo permisible para diseñar una columna bajo carga excéntrica y se escribe que la suma de los esfuerzos debidos a la carga céntrica **P** y al par flector **M** (figura 10.36*c*) no debe exceder el esfuerzo permisible para una columna con carga céntrica, el diseño resultante con frecuencia es muy conservador. Es posible un método mejor reescribiendo la ecuación (10.53) como:

$$\frac{P/A}{\sigma_{\text{perm}}} + \frac{Mc/I}{\sigma_{\text{perm}}} \le 1 \tag{10.54}$$

y sustituyendo por σ_{perm} los valores que corresponden, respectivamente, a la carga céntrica de la figura 10.36*a* y a la de la deflexión pura de la figura 10.36*b*, se tiene

$$\frac{P/A}{(\sigma_{\text{perm}})_{\text{céntrico}}} + \frac{Mc/I}{(\sigma_{\text{perm}})_{\text{flexión}}} \le 1 \tag{10.55}$$

El tipo de ecuación obtenida se llama *fórmula de interacción*.

Se observa que, si $M = 0$, el uso de esta ecuación conduce al diseño de una columna céntricamente cargada por el método de la sección 10.6. Por otra parte, cuando $P = 0$, el uso de la ecuación da como resultado el diseño de una viga sometida a flexión pura por el método del capítulo 4. Cuando P y M son ambos diferentes de cero, la ecuación de interacción produce un diseño que toma en cuenta la capacidad del elemento para resistir la flexión y la fuerza axial. En todos los casos $(\sigma_{\text{perm}})_{\text{céntrico}}$ se determinará usando la mayor relación de esbeltez de la columna sin importar el plano de flexión.†

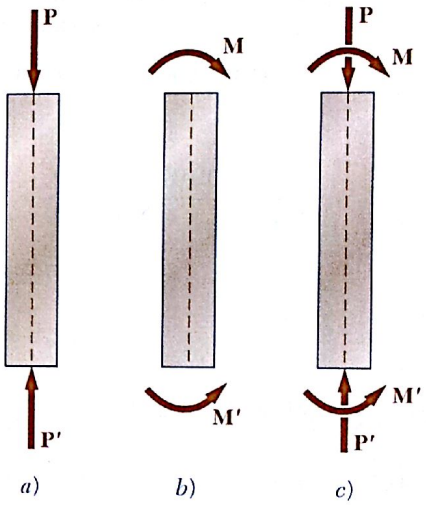


Figura 10.36

† Este procedimiento es requerido por todos los códigos principales para el diseño de elementos de acero, aluminio y madera a compresión. Además, muchas especificaciones piden el uso de un factor adicional en el segundo término de la ecuación (10.55); este factor tiene en cuenta los esfuerzos adicionales resultantes de la deflexión de la columna por flexión.

Cuando la carga excéntrica **P** no se aplica en un plano de simetría, causa flexión en los dos ejes principales de la sección transversal. Recuerde, de la sección 4.14, que la carga **P** puede reemplazarse por una fuerza céntrica

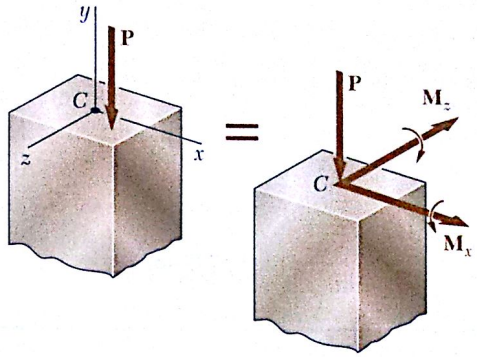


Figura 10.37

P y dos pares representados por los pares vectoriales $\mathbf{M}_x$ y $\mathbf{M}_z$ mostrados en la figura 10.37. La fórmula de interacción en tal caso es:

$$\frac{P/A}{(\sigma_{\text{perm}})_{\text{céntrico}}} + \frac{|M_x|z_{\text{máx}}/I_x}{(\sigma_{\text{perm}})_{\text{flexión}}} + \frac{|M_z|x_{\text{máx}}/I_z}{(\sigma_{\text{perm}})_{\text{flexión}}} \leq 1 \tag{10.56}$$

EJEMPLO 10.05

Utilice el método de interacción para determinar la máxima carga P que puede soportar en forma segura la columna del ejemplo 10.04 con una excentricidad de 0.8 in. El esfuerzo permisible a la flexión es 24 ksi.

El valor de $(\sigma_{\text{perm}})_{\text{céntrico}}$ se determinó en el ejemplo 10.04. Se tiene

$$(\sigma_{\text{perm}})_{\text{céntrico}} = 19.55 \text{ ksi} \qquad (\sigma_{\text{perm}})_{\text{flexión}} = 24 \text{ ksi}$$

Sustituyendo estos valores en la ecuación (10.55), se escribe

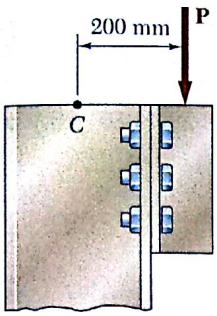
$$\frac{P/A}{19.55 \text{ ksi}} + \frac{Mc/I}{24 \text{ ksi}} \leq 1.0$$

Usando los datos numéricos del ejemplo 10.04, se escribe

$$\frac{P/4}{19.55 \text{ ksi}} + \frac{P(0.8)(1.0)/1.333}{24 \text{ ksi}} \leq 1.0$$

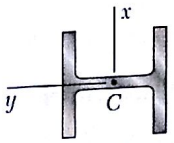
$$P \leq 26.5 \text{ kips}$$

Entonces la carga máxima que es posible aplicar con seguridad es $P = 26.5$ kips.



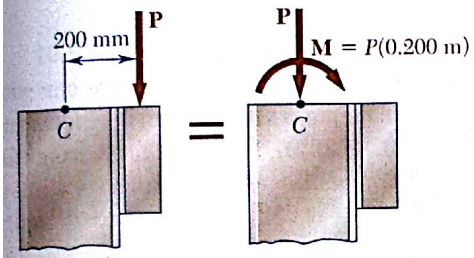
PROBLEMA MODELO 10.5

Usando el método del esfuerzo permisible, halle la máxima carga **P** para una columna de acero W310 × 74 de 4.5 m de longitud efectiva. Considere $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa.



W310 × 74
$A = 9\,480\ \text{mm}^2$
$r_x = 132\ \text{mm}$
$r_y = 49.7\ \text{mm}$
$S_x = 1\,060 \times 10^3\ \text{mm}^3$

SOLUCIÓN



La mayor relación de esbeltez es $L/r_y = (4.5\ \text{m})/(0.0497\ \text{m}) = 90.5$. Utilizando la ecuación (10.41) con $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa, se tiene la relación de esbeltez en la unión entre las dos ecuaciones para σ_{cr} es $L/r = 133.2$. Por tanto, se utilizan las ecuaciones (10.38) y (10.39) y se encuentra que $\sigma_{cr} = 161.9$ MPa. Si se utiliza la ecuación (10.42), el esfuerzo permisible es

$$(\sigma_{\text{perm}})_{\text{céntrica}} = 161.9/1.67 = 96.9\ \text{MPa}$$

Para la columna y carga dadas, se tiene:

$$\frac{P}{A} = \frac{P}{9.48 \times 10^{-3}\ \text{m}^2} \qquad \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S} = \frac{P(0.200\ \text{m})}{1.060 \times 10^{-3}\ \text{m}^3}$$

Sustituyendo en la ecuación (10.58), se escribe

$$\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \le \sigma_{\text{perm}}$$

$$\frac{P}{9.48 \times 10^{-3}\ \text{m}^2} + \frac{P(0.200\ \text{m})}{1.060 \times 10^{-3}\ \text{m}^3} \le 96.9\ \text{MPa} \qquad P \le 330\ \text{kN}$$

La máxima carga permitida **P** es entonces

$$\mathbf{P} = 330\ \text{kN} \downarrow \blacktriangleleft$$

PROBLEMA MODELO 10.6

Usando el método de interacción, resuelva el problema modelo 10.5. Suponga $(\sigma_{\text{perm}})_{\text{flexión}} = 150$ MPa.

SOLUCIÓN

Usando la ecuación (10.55), se escribe:

$$\frac{P/A}{(\sigma_{\text{perm}})_{\text{céntrico}}} + \frac{Mc/I}{(\sigma_{\text{perm}})_{\text{flexión}}} \le 1$$

Sustituyendo el esfuerzo de flexión permisible dado y el esfuerzo céntrico permisible encontrado en el problema modelo 10.5, lo mismo que los otros datos dados, se tiene

$$\frac{P/(9.48 \times 10^{-3}\ \text{m}^2)}{96.9 \times 10^{6}\ \text{Pa}} + \frac{P(0.200\ \text{m})/(1.060 \times 10^{-3}\ \text{m}^3)}{150 \times 10^{6}\ \text{Pa}} \le 1$$

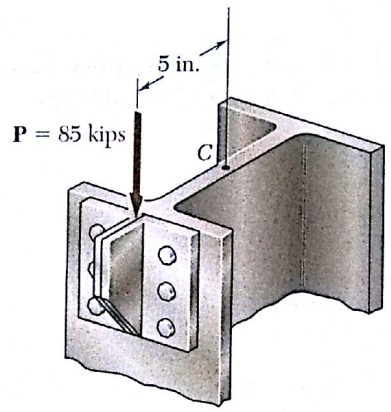
$$P \le 426\ \text{kN}$$

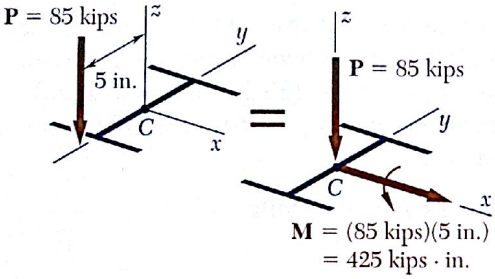
La fuerza máxima admisible **P** es entonces

$$\mathbf{P} = 426\ \text{kN} \downarrow \blacktriangleleft$$

PROBLEMA MODELO 10.7

Una columna de acero tiene una longitud efectiva de 16 ft y está cargada excéntricamente, como se indica en la figura. Usando el método de interacción, elija el perfil W apropiado con altura nominal de 8 in. Suponga $E = 29 \times 10^6$ psi y $\sigma_Y = 36$ ksi, y use un esfuerzo permisible a flexión de 22 ksi.





M = (85 kips)(5 in.)
= 425 kips · in.

SOLUCIÓN

Para ayudar a seleccionar una sección de ensayo, se utiliza el método del esfuerzo permisible con $\sigma_{perm} = 22$ ksi, y se escribe

$$\sigma_{perm} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{I_x} = \frac{P}{A} + \frac{Mc}{Ar_x^2} \tag{1}$$

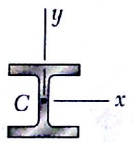
En el apéndice C se observa que para perfiles de 8 in., $c \approx 4$ in. y $r_x \approx 3.5$ in. Sustituyendo en la ecuación (1), se tiene

$$22 \text{ ksi} = \frac{85 \text{ kips}}{A} + \frac{(425 \text{ kips} \cdot \text{in.})(4 \text{ in.})}{A(3.5 \text{ in.})^2} \qquad A \approx 10.2 \text{ in.}^2$$

En la primera instancia se elige el perfil W8 × 35.

Ensayo 1: W8 × 35. Los esfuerzos permisibles son

Esfuerzos de flexión permisibles (véase los datos) $(\sigma_{perm})_{flexión} = 22$ ksi



W8 × 35

$A = 10.3 \text{ in.}^2$
$r_x = 3.51$ in.
$r_y = 2.03$ in.
$S_x = 31.2 \text{ in.}^3$
$L = 16 \text{ ft} = 192$ in.

Esfuerzo concéntrico permisible: La mayor relación de esbeltez de la columna es $L/r_y = (192 \text{ in.})/(2.03 \text{ in.}) = 94.6$. Si se usa la ecuación (10.41) con $E = 29 \times 10^6$ psi y $\sigma_Y = 36$ ksi, se encuentra que la relación de esbeltez en la unión entre las dos ecuaciones para σ_{cr} es $L/r = 133.7$. Por lo tanto, se utilizan las ecuaciones (10.38) y (10.39) y se encuentra que $\sigma_{cr} = 22.5$ ksi. A partir de la ecuación (10.42), el esfuerzo permisible es

$$(\sigma_{perm})_{céntrico} = 22.5/1.67 = 13.46 \text{ ksi}$$

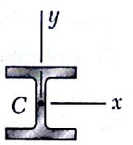
Para la sección W8 × 35, se tiene

$$\frac{P}{A} = \frac{85 \text{ kips}}{10.3 \text{ in.}^2} = 8.25 \text{ ksi} \qquad \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S_x} = \frac{425 \text{ kips} \cdot \text{in.}}{31.2 \text{ in.}^3} = 13.62 \text{ ksi}$$

Con estos datos se halla que el primer miembro de la ecuación (10.55) es

$$\frac{P/A}{(\sigma_{perm})_{céntrico}} + \frac{Mc/I}{\sigma_{perm})_{flexión}} = \frac{8.25 \text{ ksi}}{13.464 \text{ ksi}} + \frac{13.62 \text{ ksi}}{22 \text{ ksi}} = 1.232$$

Como $1.232 > 1.000$ el requisito expresado por la fórmula de interacción no se satisface; debe elegirse una sección más grande.



W8 × 48

$A = 14.1 \text{ in.}^2$
$r_x = 3.61$ in.
$r_y = 2.08$ in.
$S_x = 43.3 \text{ in.}^3$
$L = 16 \text{ ft} = 192$ in.

Ensayo 2: W8 × 48. Siguiendo el procedimiento anterior, se escribe

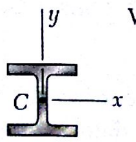
$$\frac{L}{r_y} = \frac{192 \text{ in.}}{2.08 \text{ in.}} = 92.3 \qquad (\sigma_{perm})_{céntrico} = 13.76 \text{ ksi}$$

$$\frac{P}{A} = \frac{85 \text{ kips}}{14.1 \text{ in.}^2} = 6.03 \text{ ksi} \qquad \frac{Mc}{I} = \frac{M}{S_x} = \frac{425 \text{ kips} \cdot \text{in.}}{43.3 \text{ in.}^3} = 9.82 \text{ ksi}$$

Sustituyendo en la ecuación (10.55):

$$\frac{P/A}{(\sigma_{perm})_{céntrico}} + \frac{Mc/I}{(\sigma_{perm})_{flexión}} = \frac{6.03 \text{ ksi}}{13.76 \text{ ksi}} + \frac{9.82 \text{ ksi}}{22 \text{ ksi}} = 0.884 < 1.000$$

El perfil W8 × 48 es satisfactorio pero puede ser innecesariamente grande.



W8 × 40

$A = 11.7 \text{ in.}^2$
$r_x = 3.53$ in.
$r_y = 2.04$ in.
$S_x = 35.5 \text{ in.}^3$
$L = 16 \text{ ft} = 192$ in.

Ensayo 3: W8 × 40. Siguiendo el procedimiento, la fórmula de interacción no se satisface.

Selección de perfil. Se debe utilizar el perfil W8 × 48 ◀

PROBLEMAS

10.89 Una columna de 5.5 m de longitud efectiva está elaborada de una aleación de aluminio 2014-T6 para el que el esfuerzo permisible a la flexión es 220 MPa. Con el método de interacción determine la carga permisible **P**, si se sabe que la excentricidad es *a*) $e = 0$, *b*) $e = 40$ mm.

10.90 Retome el problema 10.89, y ahora suponga que la longitud efectiva de la columna es de 3.0 m.

10.91 Una columna de madera con una sección transversal de 5.0 × 7.5 in. tiene una longitud efectiva de 8.5 ft. El tipo de madera que se usó tiene un esfuerzo permisible ajustado para la compresión paralela a las fibras $\sigma_C = 1\,180$ psi y un módulo ajustado $E = 440 \times 10^3$ psi. Con el método del esfuerzo permisible, determine la carga excéntrica **P** más grande que puede aplicarse cuando *a*) $e = 0.5$ in., *b*) $e = 1.0$ in.

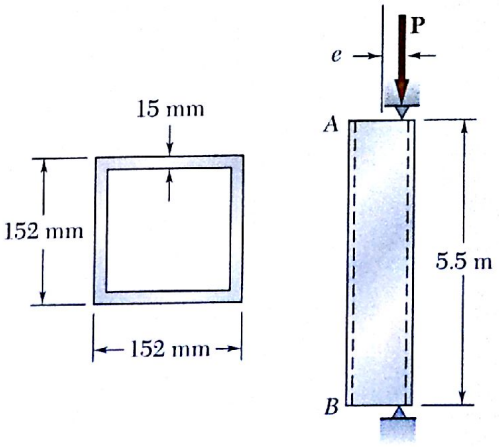


Figura P10.89

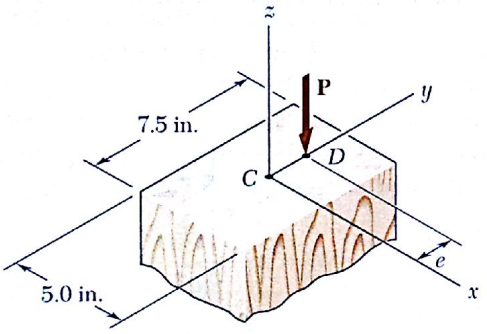


Figura P10.91

10.92 Retome el problema 10.91, y ahora use el método de interacción y un esfuerzo permisible a la flexión de 1 300 psi.

10.93 Un elemento a compresión con 2.75 m de longitud efectiva soporta una carga céntrica, como se muestra en la figura. Utilice el método del esfuerzo permisible y suponga que $e = 40$ mm, para determinar la carga **P**. Considere que $\sigma_Y = 250$ MPa y $E = 200$ GPa.

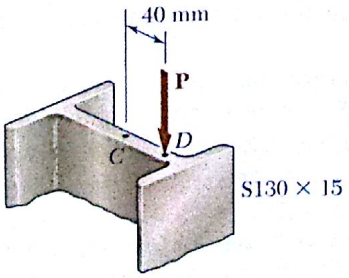


Figura P10.93

10.94 Retome el problema 10.93, y ahora use $e = 60$ mm.

10.95 Una columna rectangular está hecha de una madera que tiene un esfuerzo permisible ajustado para la compresión paralela a la fibra $\sigma_C = 1\,750$ psi y un módulo de elasticidad ajustado $E = 580 \times 10^3$ psi. Con el método del esfuerzo permisible determine la mayor longitud efectiva permisible L que puede utilizarse.

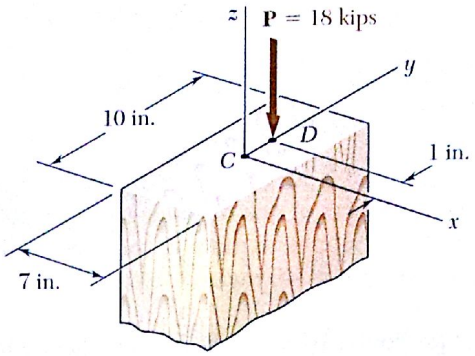


Figura P10.95

10.96 Retome el problema 10.95, y ahora suponga que $P = 24$ kips.

10.97 Una carga excéntrica $P = 48$ kN se aplica en un punto a 20 mm del eje geométrico de la barra de 50 mm de diámetro, la cual está hecha de una aleación de aluminio 6061-T6. Use el método de interacción y un esfuerzo permisible a la tensión de 145 MPa para determinar la máxima longitud efectiva permisible L que puede utilizarse.

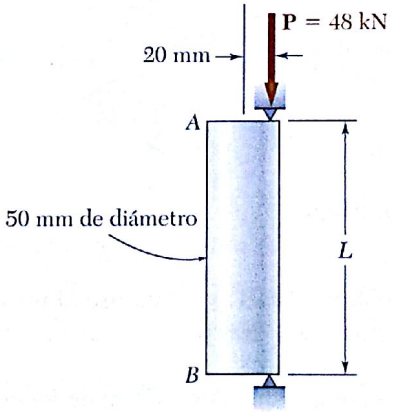


Figura P10.97

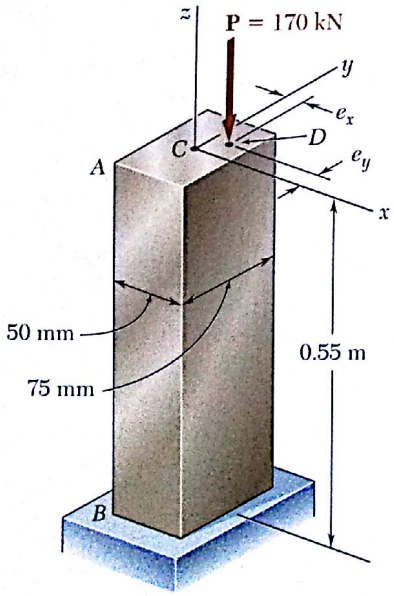


Figura P10.99 y P10.100

10.98 Retome el problema 10.97, y ahora suponga que la aleación de aluminio empleada es 2014-T6, y que el esfuerzo permisible a la flexión es de 180 MPa.

10.99 El elemento a compresión AB está hecho de acero para el que $\sigma_Y = 250$ MPa y $E = 200$ GPa. Está libre en su parte superior A y fijo en su base B. Con el método de esfuerzo permisible, determine la máxima excentricidad permisible e_x, si se sabe que *a*) $e_y = 0$, *b*) $e_y = 8$ mm.

10.100 El elemento a compresión AB está hecho de acero para el que $\sigma_Y = 250$ MPa y $E = 200$ GPa. Está libre en su parte superior A y fijo en su base B. Con el método de interacción para un esfuerzo flector permisible igual a 120 MPa, y sabiendo que las excentricidades e_x y e_y son iguales, determine su valor común permisible máximo.

10.101 Una columna de 14 ft de longitud efectiva consiste en una sección de tubo de acero que tiene la sección transversal que se ilustra en la figura. Con el método del esfuerzo permisible, calcule la máxima excentricidad permisible e si *a*) $P = 55$ kips, *b*) $P = 35$ kips. Considere $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi.

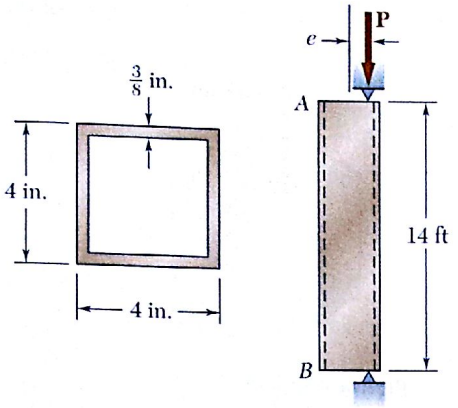


Figura *P10.101*

10.102 Retome el problema 10.101, y ahora suponga que la longitud efectiva de la columna se incrementa a 18 ft y que *a*) $P = 28$ kips, *b*) $P = 18$ kips.

10.103 Una columna de madera con sección transversal rectangular tiene una longitud efectiva de 7.2 ft y soporta una carga de 9.2 kips, como muestra la figura. Los tamaños disponibles para b son iguales a 3.5, 5.5, 7.5 y 9.5 in. El tipo de madera tiene un esfuerzo permisible ajustado para la compresión paralela a la fibra $\sigma_C = 1\,180$ psi y un módulo ajustado $E = 440 \times 10^3$ psi. Con el método del esfuerzo permisible, determine la sección más ligera que puede emplearse.

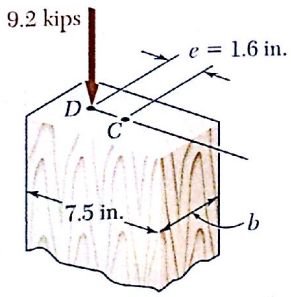


Figura P10.103

10.104 Retome el problema 10.103, y ahora suponga que $e = 3.2$ in.

10.105 La carga excéntrica **P** tiene una magnitud de 85 kN y se aplica en un punto localizado a una distancia $e = 30$ mm del eje geométrico de un cilindro hecho de una aleación de aluminio 6016-T6. Con el método de la interacción y un esfuerzo permisible a la flexión de 140 MPa, encuentre el diámetro más pequeño d que puede utilizarse.

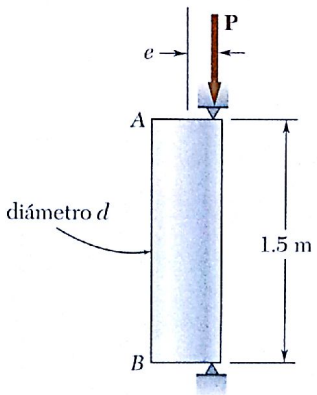


Figura P10.105

10.106 Retome el problema 10.105 con el método del esfuerzo permisible, y suponga que la aleación de aluminio empleada es una 2014-T6.

10.107 Un elemento de compresión con sección transversal rectangular tiene una longitud efectiva de 36 in. y está hecho de una aleación de aluminio 2014-T6, para la que el esfuerzo permisible a la flexión es de 24 ksi. Con el método de interacción, determine la dimensión d más pequeña de la sección transversal que puede usarse cuando $e = 0.4$ in.

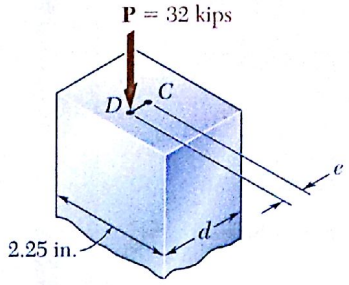


Figura P10.107

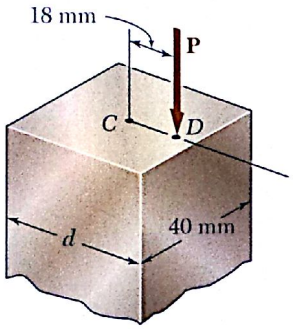


Figura P10.109

10.108 Retome el problema 10.107, y ahora suponga que $e = 0.2$ in.

10.109 Un elemento de compresión hecho de acero tiene una longitud efectiva de 720 mm y debe soportar una carga **P** de 198 kN, según se muestra en la figura. Para el material empleado, $\sigma_Y = 250$ MPa y $E = 200$ GPa. Con el método de interacción y un esfuerzo permisible a la flexión igual a 150 MPa, determine la dimensión d más pequeña de la sección transversal que puede utilizarse.

10.110 Retome el problema 10.109, y ahora suponga que la longitud efectiva es de 1.62 m y que la magnitud P de la carga excéntrica es de 128 kN.

10.111 Un tubo de aluminio con 80 mm de diámetro exterior debe soportar una carga **P** de 93 kN con una excentricidad de 20 mm. Los tubos disponibles para su uso están hechos con grosores de pared en incrementos de 3 mm desde 6 mm hasta 15 mm. Emplee el método de diseño del esfuerzo permisible y determine el tubo más ligero que puede utilizarse. Suponga que $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa.

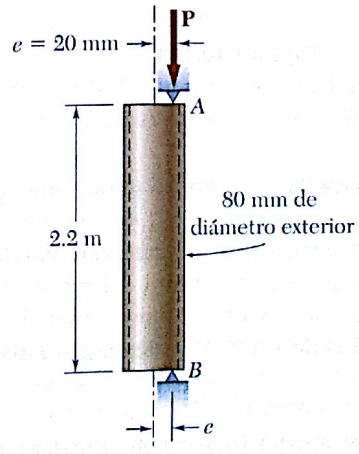


Figura P10.111

10.112 Retome el problema 10.111, y ahora use el método de diseño de interacción con $P = 165$ kN, $e = 15$ mm y un esfuerzo permisible a la flexión de 150 MPa.

10.113 Una columna de acero con 24 ft de longitud efectiva está excéntricamente cargada, como se muestra en la figura. Con el método del esfuerzo permisible, seleccione la profundidad nominal del perfil de patín ancho de 14 in. que debe usarse. Emplee $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi.

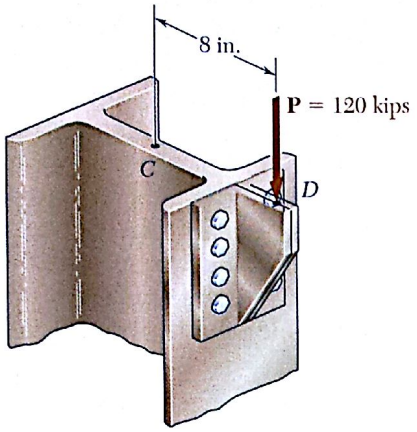


Figura P10.113

10.114 Retome el problema 10.113, y ahora use el método de interacción, suponga que $\sigma_Y = 50$ ksi y un esfuerzo permisible a la flexión de 30 ksi.

10.115 Un elemento de compresión de acero de longitud efectiva de 5.8 m, sostiene una carga excéntrica **P** de 296 kN. Con el método de interacción, seleccione la profundidad nominal del perfil de patín ancho de 200 mm que debe usarse. Utilice $E = 200$ GPa, $\sigma_Y = 250$ MPa y $\sigma_{perm} = 150$ MPa a la flexión.

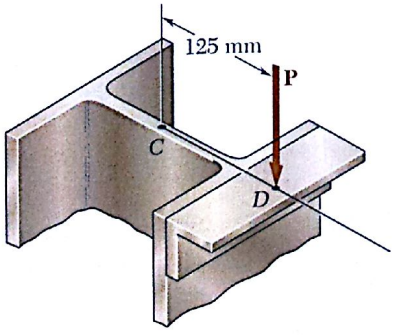


Figura P10.115

10.116 Una columna de acero de 7.2 m de longitud efectiva debe soportar una carga excéntrica **P** de 83 kN en un punto D localizado sobre el eje x, según se muestra en la figura. Con el método del esfuerzo permisible, seleccione la profundidad nominal del perfil de patín ancho de 250 mm que debe utilizarse. Considere $E = 200$ GPa y $\sigma_Y = 250$ MPa.

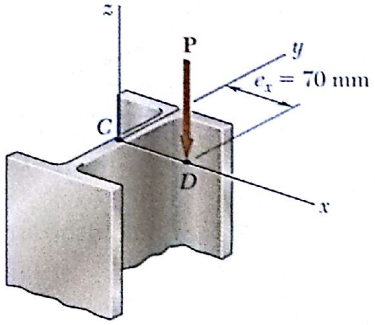


Figura *P10.116*

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 10

Este capítulo se dedicó al diseño y análisis de columnas, es decir, elementos prismáticos bajo cargas axiales. Para familiarizarse con el comportamiento de las columnas se consideró, en la sección 10.2, el equilibrio de un modelo simple y se halló que para valores de carga P por encima de cierto valor P_{cr}, llamado *carga crítica*, eran posibles dos posiciones de equilibrio del modelo: la posición original, con cero deflexiones transversales, y una segunda posición que incluía deflexiones que podían ser bastante grandes. Esto condujo a concluir que la primera posición de equilibrio era inestable para $P > P_{cr}$, y estable para $P < P_{cr}$, pues en el último caso era la única posición posible de equilibrio.

Carga crítica

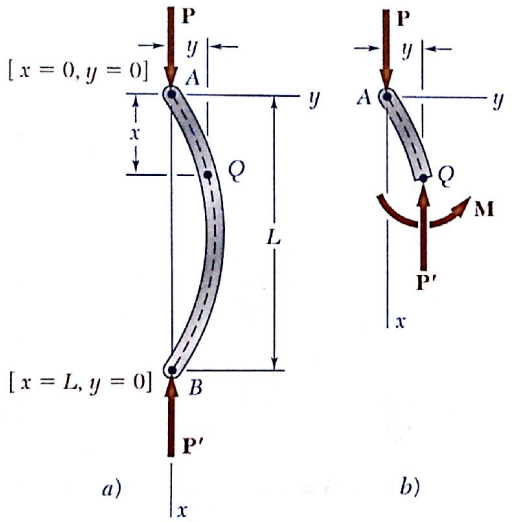


Figura 10.8

En la sección 10.3 se estudió una columna articulada de longitud L y de rigidez flexional constante EI sometida a una carga axial céntrica P. Suponiendo que la columna se hubiera pandeado (figura 10.8), se había observado que el momento flector en Q era igual a $-P_y$ y se escribió

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} = -\frac{P}{EI}y \tag{10.4}$$

Fórmula de Euler

Resolviendo la ecuación diferencial, sujeta a las condiciones de frontera correspondientes a una columna articulada, se determinó la carga P más pequeña para la cual el pandeo podría ocurrir. Esta carga, llamada *carga crítica* y denotada por P_{cr}, está dada por la *fórmula de Euler*:

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \tag{10.11}$$

en donde L es la longitud de la columna. Para esta carga, u otra mayor, el equilibrio de la columna es inestable y ocurren deflexiones transversales.

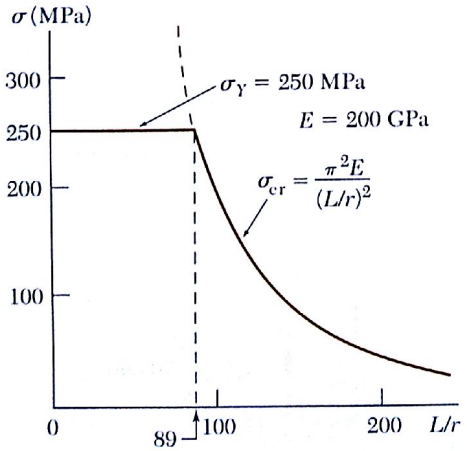


Figura 10.9

Relación de esbeltez

Representando el área de la sección transversal de la columna por A y su radio de giro por r, se encontró el esfuerzo crítico σ_{cr} correspondiente a la carga crítica P_{cr}:

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \tag{10.13}$$

La cantidad L/r se llamó *relación de esbeltez* y se dibujó σ_{cr} como función de L/r (figura 10.9). Puesto que el análisis se basó en esfuerzos que permanecen por debajo del límite de cedencia del material, se observó que la columna fallaría por fluencia cuando $\sigma_{cr} > \sigma_Y$.

En la sección 10.4 se analizó la carga crítica de columnas con diferentes condiciones de extremo y se escribió

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L_e^2} \qquad (10.11')$$

en donde L_e es la *longitud efectiva* de la columna, es decir, la longitud de una columna equivalente articulada. Se calcularon las longitudes efectivas de varias columnas con diferentes condiciones de extremo, y se mostraron en la figura 10.18 de la página 617.

Longitud efectiva

En la sección 10.5, se consideraron columnas bajo carga *axial excéntrica*. En una columna articulada sometida a una carga P aplicada con excentricidad e, reemplazamos la carga por una carga axial céntrica y un par de momento $M_A = Pe$ (figuras 10.19*a* y 10.20) y se dedujo la siguiente expresión para la máxima deflexión transversal:

$$y_{máx} = e\left[\sec\left(\sqrt{\frac{P}{EI}}\frac{L}{2}\right) - 1\right] \qquad (10.28)$$

Carga axial excéntrica. Fórmula de la secante

Después se determinó el esfuerzo máximo en la columna y, de la expresión obtenida para ese esfuerzo, se dedujo la *fórmula de la secante*:

$$\frac{P}{A} = \frac{\sigma_{máx}}{1 + \dfrac{ec}{r^2}\sec\left(\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{P}{EA}}\dfrac{L_e}{r}\right)} \qquad (10.36)$$

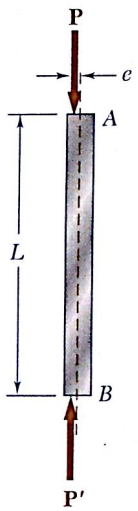


Figura 10.19*a*

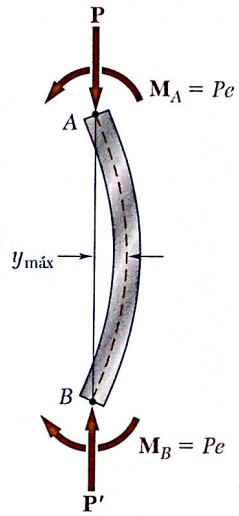


Figura 10.20

Esta ecuación puede resolverse para la fuerza por unidad de área, P/A, la cual causa un máximo esfuerzo especificado $\sigma_{máx}$ en una columna articulada en los extremos o en cualquier otra columna de relación efectiva de esbeltez L_e/r.

En la primera parte de este capítulo cada columna se tomó como un prisma homogéneo recto. Como en todas las columnas reales hay imperfecciones, el *diseño de columnas reales* se realiza mediante el uso de fórmulas empíricas basadas en pruebas de laboratorio y expresadas en especificaciones de códigos elaborados por organizaciones profesionales. En la sección 10.6 se analizó el diseño de *columnas céntricamente cargadas*, hechas de acero, aluminio o madera. Para cada material el diseño se basó en ecuaciones que expresan el esfuerzo permisible como función de la relación de esbeltez L/r de la columna.

Diseño de columnas reales

Columnas céntricamente cargadas

En la última sección de este capítulo [véase sección 10.7] se estudiaron dos métodos utilizados para el diseño de columnas bajo una carga *excéntrica*. El primero fue el *método del esfuerzo permisible*, un método conservador en el cual se supone que el esfuerzo permisible es el mismo que si la columna estuviera céntricamente cargada. El método del esfuerzo permisible requiere que se satisfaga la siguiente desigualdad:

Columnas con carga excéntrica

Método del esfuerzo permisible

$$\frac{P}{A} + \frac{Mc}{I} \le \sigma_{perm} \qquad (10.53)$$

El segundo método fue el de *interacción*, usado en la mayor parte de las especificaciones modernas. En este método, el esfuerzo permisible para una columna cargada céntricamente se usa para la porción del esfuerzo total producido por la carga axial y el esfuerzo permisible a deflexión, para el esfuerzo producido por la flexión. Así, la desigualdad por satisfacer es

Método de interacción

$$\frac{P/A}{(\sigma_{perm})_{céntrico}} + \frac{Mc/I}{(\sigma_{perm})_{flexión}} \le 1 \qquad (10.55)$$

PROBLEMAS DE REPASO

10.117 La varilla de acero BC está unida a la barra rígida AB y al apoyo fijo en C. Si se sabe que $G = 11.2 \times 10^6$ psi, determine la carga crítica P_{cr} del sistema cuando $d = \frac{1}{2}$ in.

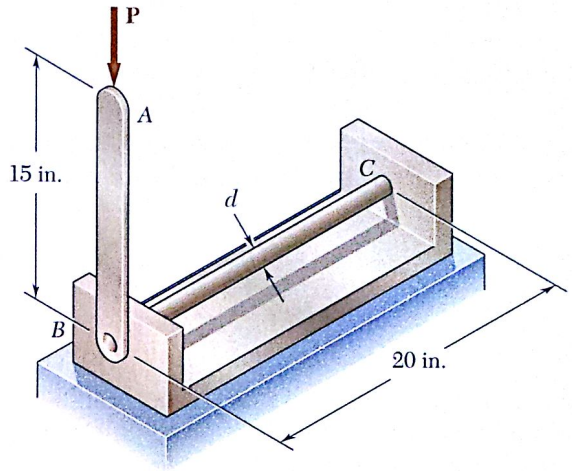


Figura P10.117

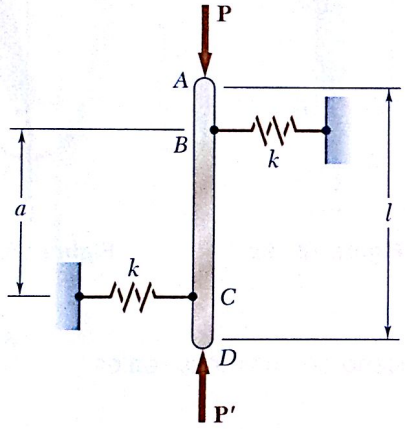


Figura *P10.118*

10.118 La barra rígida AD está unida a dos resortes de constante k y se encuentra en equilibrio, según la posición mostrada en la figura. Si se sabe que las fuerzas iguales y opuestas **P** y **P'** *permanecen verticales*, determine la magnitud P_{cr} de la carga crítica para el sistema. Cada resorte puede actuar ya sea a tensión o a compresión.

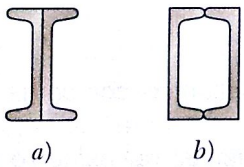


Figura P10.119

10.119 Una columna de 3 m de longitud efectiva se construirá al soldar dos canales de acero laminado C130 × 13. Utilice $E = 200$ GPa para determinar, en cada arreglo que se muestra en la figura, la carga céntrica permisible si se requiere un factor de seguridad de 2.4.

10.120 El elemento AB es un solo canal de acero C130 × 10.4 de 2.5 m de longitud. Si se sabe que los anclajes en los puntos A y B pasan a través del centroide de la sección transversal del canal, determine el factor de seguridad para la carga que se muestra respecto del pandeo en el plano de la figura si $\theta = 30°$. Considere que $E = 200$ GPa.

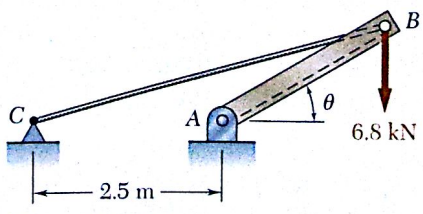


Figura P10.120

10.121 Un puntal cuadrado de aluminio de 1 in. se mantiene en la posición que se observa en la figura gracias a un anclaje en el punto A y por un conjunto de apoyos móviles en B y C, los cuales impiden la rotación del puntal en el plano de la figura. Si se sabe que $L_{AB} = 3$ ft, $L_{BC} = 4$ ft y $L_{CD} = 1$ ft, determine la carga **P** permisible con un factor de seguridad de 3.2 respecto del pandeo. Considere sólo el pandeo en el plano de la figura y use $E = 10.4 \times 10^6$ psi.

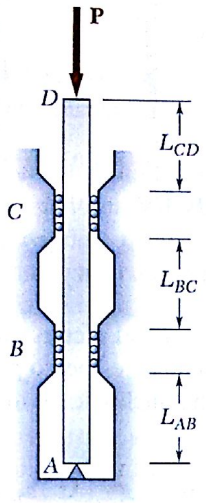


Figura P10.121

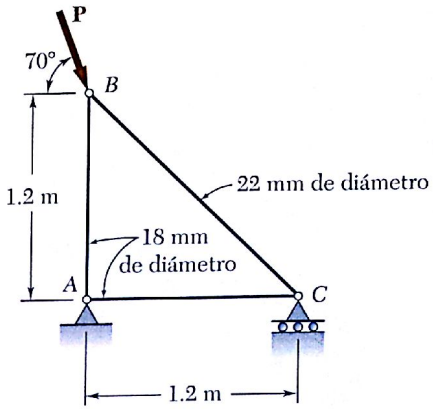


Figura *P10.122*

10.122 Determine el factor de seguridad para la estructura que se muestra en la figura, si se sabe que $P = 5.2$ kN. Utilice $E = 200$ GPa y considere sólo el pandeo en el plano de la estructura.

10.123 Se aplica una carga axial **P** a la varilla de acero AB con un diámetro de 1.25 in. que se muestra en la figura. Para $P = 8.6$ kips y $e = \frac{1}{16}$ in., determine *a*) la deflexión en el punto medio C de la varilla, *b*) el esfuerzo máximo en la varilla. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi.

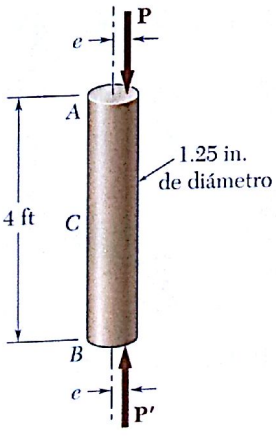


Figura P10.123

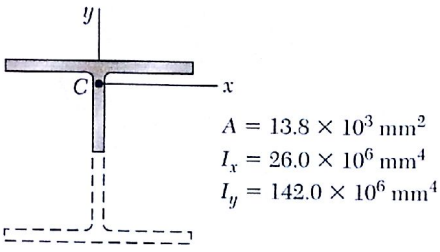


Figura P10.124

10.124 Una columna está hecha de medio perfil de acero laminado W360 × 216 y tiene las propiedades geométricas que se muestran en la figura. Con el diseño de esfuerzo permisible, determine la carga céntrica permisible si la longitud efectiva de la columna es *a*) 4.0 m, *b*) 6.5 m. Utilice $\sigma_Y = 345$ MPa y $E = 200$ GPa.

10.125 Un elemento a compresión tiene la sección transversal que se muestra en la figura y una longitud efectiva de 5 ft. Si se sabe que la aleación de aluminio usada es 2014–T6, determine la carga céntrica permisible.

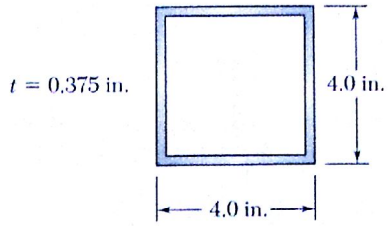


Figura *P10.125*

10.126 Una columna con longitud efectiva de 17 ft debe sostener una carga céntrica de 235 kips. Utilice el diseño de esfuerzo permisible para seleccionar la profundidad nominal del perfil de patín ancho de 10 in. que debe usarse. Considere que $\sigma_Y = 36$ ksi y $E = 29 \times 10^6$ psi.

10.127 Una carga vertical **P** de 32 kN se aplica en el punto medio de una arista de la sección transversal cuadrada de un elemento a compresión *AB*, el cual está hecho de aluminio y tiene su parte superior *A* libre y su base *B* fija. Si se sabe que la aleación empleada es una 6061-T6, con el método del esfuerzo permisible calcule la dimensión *d* más pequeña permisible.

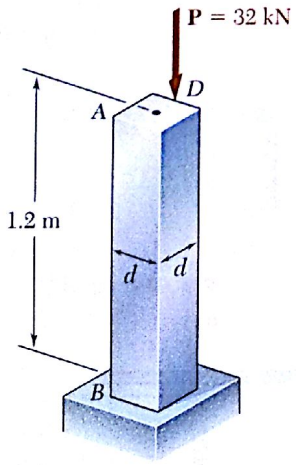


Figura *10.127*

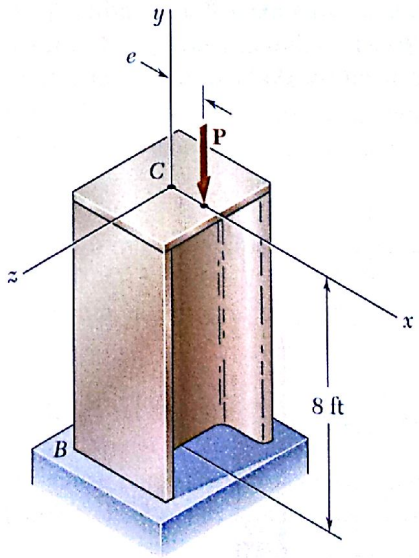


Figura P10.128

10.128 Una carga axial **P** de 43 kips se aplica a la columna *BC* de acero laminado en un punto del eje *x* a una distancia $e = 2.5$ in. del eje geométrico de la columna. Con el método del esfuerzo permisible, seleccione la profundidad nominal del perfil de patín ancho de 8 in. que debe emplearse. Utilice $E = 29 \times 10^6$ psi y $\sigma_Y = 36$ ksi.